Valentinas Matiuchinas

Geometrijos sunkesni uždaviniai



LEIDYBOS CENTRAS

LIETUVOS RESPUBLIKOS
ŠVIETIMO IR MOKSLO MINISTERIJA

Valentinas
Matiuchinas

Geometrijos sunkesni uždaviniai

LEIDYBOS CENTRAS

VILNIUS
1995

UDK 372.851
Ma 626

Recenzentės: R. Jakubauskaitė,
J. Malinovskaja

ISBN 9986-03-144-3

PRATARMĖ

Matematinį pasirengimą nusako mokėjimas spręsti uždavinius. Išmokti spręsti kai kuriuos uždavinius neįmanoma: kartais matematikai pašvenčia visą savo gyvenimą vienam uždaviniui spręsti; yra tokių uždavinių, kurie iki šių dienų neišspręsti. Bet, turint užtektinai noro ir darbštumo, mokyklinius uždavinius galima išmokti spręsti.

Paprastai uždavinys sprendžiamas pagal schemą: trumpa sąlygos analizė ir jos užrašymas, sprendimo būdo ieškojimas, sprendimo plano sudarymas ir sprendimas, sprendinio tyrimas ir analizė, patikrinimas.

Sprendžiant nestandartinius ir sudėtingus uždavinius, naudinga juos padalyti į daug paprastesnius, papildyti, pritaikyti jau žinomų uždavinių sprendimus, o jei tai nepavyksta, ieškoti ypatingo sprendimo būdo.

Viliuosi, kad išnagrinėję čia pateiktus uždavinius ir jų sprendinius, galėsite spręsti ir nežinomus uždavinius.

Leidinys skirtas ne tik mokytojams, bet ir VII—XII klasių mokinių savarankiškam darbui. Čia nagrinėjami 239 sunkesnių uždavinių iš vadovėlių [1] ir [2]* sprendimai (uždavinių sąlygose skliausteliuose nurodytas numeris, kuriuo šis uždavinys pažymėtas vadovėlyje).

Uždavinio siūlomi sprendimo būdai priklauso nuo to, kur jis yra geometrijos kurse. Todėl bet kuriuo atveju kalbama ir apie jo sprendimą, kai apribojami sprendimo būdai. Tai leidžia VII klasės mokiniams spręsti 1—40 uždavinius, VIII klasės mokiniams — 41—139 uždavinius, IX klasės mokiniams — 140—187 uždavinius. Patariu lipant žinių laiptais grįžti prie šių uždavinių sprendimo.

Rekomenduoju kiekvieną uždavinį spręsti tokia tvarka: a) pabandyti išspręsti uždavinį savarankiškai,

---

* Žr. literatūros sąrašą, p. 148.

b) perskaityti čia duotą sprendimą, c) atlikti visus veiksmus savarankiškai, d) pabandyti apibendrinti uždavinį.

Spręsdamas uždavinius, neieškojau geriausių sprendimo būdų ir apibendrinimų. Tai palikau padaryti besidominčiam matematika skaitytojui.

Dėkoju ministerijos vyr. specialistei V. Būdienei už nuolatinį dėmesį šiam darbui, recenzentėms mokytojoms R. Jakubauskaitei ir I. Malinovskajai už vertingas pastabas, doc. P. Vaškui, įdėmiai perskaičiusiam šį darbą ir pateikusiam daug pastabų.

Autorius

ĮVADAS

Geometrijos mokymas neįmanomas be teorinės medžiagos papildymo įvairių geometrijos uždavinių sprendimais. Todėl autoriai, sudarydami vadovėlius „Geometrija 7—9" ir „Geometrija 10—12", skyrė ypatingą dėmesį uždavinių ir pratimų sistemai. Mūsų nuomone, didelę reikšmę turi optimalus teorinės medžiagos ir uždavinių santykis. Geometrijos pamokos mokykloje turėtų būti organizuojamos taip, kad ne mažiau kaip pusę mokymo laiko užimtų uždavinių sprendimas.

Vadovėliuose „Geometrija 7—9" ir „Geometrija 10—12" uždaviniai pateikti atsižvelgiant į jų sudėtingumą ir teorinės medžiagos dėstymo tvarką. Kiekviename paragrafe yra ir paragrafo temos uždavinių, ir susijusių su ankstesnėmis temomis. Be to, kiekvieno skyriaus pabaigoje duota 20—30 papildomų uždavinių. Jie skirti ir pagrindiniam darbui, ir kartojimui. Sudėtingesnius uždavinius galima naudoti užklasinei veiklai.

Be šių uždavinių, kiekvienai klasei pateikti sunkesni uždaviniai. Vadovėlyje „Geometrija 7—9" tokių uždavinių yra 188, o vadovėlyje „Geometrija 10—12"— 51 uždavinys, iš viso — 239 uždaviniai.

Sunkesnių uždavinių sudėtingumas nevienodas. Čia yra uždavinių, tinkamų ir vidutiniam moksleiviui, tik nedaug sudėtingesnių už pagrindinius ir papildomus uždavinius. Taip pat yra ir gana sudėtingų uždavinių.

Žinoma, sunkesni uždaviniai nėra privalomi mokantis vidurinės mokyklos paprastose klasėse. Autoriaus manymu, jie nenagrinėtini klasėje ir neužduotini į namus. Kam tada jie vadovėlyje? Autorių nuomone, vadovėlyje turi būti įvairaus sudėtingumo uždavinių, kad kiekvienas moksleivis rastų tarp jų sau įdomių. Būtų gerai, jei mokytojas individualiai padėtų moksleiviams, labiau besidomintiems geometrija, pasirinkti šiuos uždavinius.

Dabar, kai kuriasi įvairių tipų mokyklos, ypač realinės, taip pat sustiprinto matematikos mokymo klasės, dauguma sunkesnių uždavinių gali būti sėkmingai naudojami šiose klasėse nagrinėjant temas, kurių nėra paprastos vidurinės mokyklos geometrijos kurse.

Rinkdami sunkesnius uždavinius, autoriai turėjo keletą tikslų. Pirmiausia atrodė būtina, kad būtų uždavinių, tinkamų stojan-

tiesiems egzaminams į aukštąsias mokyklas, tarp jų ir į realinio profilio mokyklas. Tokie uždaviniai, pavyzdžiui, 1203-iasis ir 1206-asis „Geometrijoje 7--9", paimti iš MVU fizikos fakulteto variantų, 766-asis, 805-asis iš MPVU matematikos fakulteto variantų. Be to, turi būti ir sudėtingų uždavinių moksleiviams, labiau besidomintiems geometrija. Tai uždaviniai, papildantys planimetrijos kursą, pavyzdžiui, apie apskritimą ir Eulerio tiesę, apie Simpsono tiesę, apie Apolonijaus apskritimus ir jų savybes, Ptolemėjaus teoremą, Eulerio formulę ir kt. Čia galima priskirti ir sunkius brėžimo plokštumoje uždavinius. Taip pat ir uždaviniai, papildantys stereometrijos kursą, pvz., Eulerio teorema daugiasieniams (784-asis uždavinys), taisyklingųjų daugiasienių savybės (785-asis, 786-asis uždaviniai), tiesė ir Eulerio sfera tetraedrui (814-asis, 815-asis uždaviniai) ir kt. Be to, reikia pagrindinio kurso sunkesnių temų uždavinių (815-asis uždavinys „Geometrijoje 7—9", 774-asis uždavinys „Geometrijoje 10—12"). Pagaliau turi būti ir uždavinių, lavinančių moksleivių loginį mąstymą (pavyzdžiui, 326-asis, 327-asis uždaviniai iš „Geometrijos 7—9" arba 767-asis, 772-asis, 782-asis uždaviniai iš „Geometrijos 10—12").

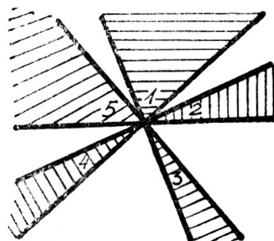
Atkreipsime dėmesį į dar vieną aplinkybę, turėjusią įtakos parenkant uždavinius: šie uždaviniai turi sudominti moksleivius geometrija. Atsižvelgiant į tai, autoriai stengėsi įtraukti tokius uždavinius, kurie atspindi pačius neįtikėtiniausius geometrijos faktus, pavyzdžiui, 1215-asis uždavinys iš „Geometrijos 7—9", taip pat uždavinius, kurių sprendimai žavi išmone. Antrojo tipo uždavinių pavyzdys yra 1199-asis uždavinys iš „Geometrijos 7—9": „Įrodyti, kad keturkampio ABCD plotas S tenkina nelygybę $S \leqslant \frac{ac+bd}{2}$, kur $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$." Įrodymui išnagrinėsime keturkampį ABCD', kur D' — taškas, simetriškas taškui D atkarpos AC vidurio statmens atžvilgiu. Kadangi keturkampių ABCD ir ABCD' plotai lygūs, $AD=CD'$, $AD^1=CD$, tai padaliję keturkampį ABCD' įstrižaine BD' į du trikampius ABD' ir BCD' ir atsižvelgę į tai, kad šių trikampių plotai S_1 ir S_2 tenkina nelygybes: $S_1 \leqslant \frac{ac}{2}$, $S_2 \leqslant \frac{bd}{2}$, gauname: $S=S_1+S_2 \leqslant \frac{1}{2}(ac+bd)$.

Žinoma, uždavinių sprendimai, pateikti šiame leidinyje, nėra vieninteliai galimi sprendimai. Kiekvieną geometrinį uždavinį, ypač tuos, kurie įtraukti į sunkesnių uždavinių skyrių, galima išspręsti ne vienu būdu. Todėl reiktų visokeriopai skatinti moksleivių, kurie siūlo originalius sprendimo būdus, iniciatyvą.

Profesorius *L. Atanasianas*

PLANIMETRIJA

I. GEOMETRIJOS PRADINĖS ŽINIOS



1 pav.

1(322). Sakykime, a — skaičius, išreiškiantis atkarpos AB ilgį matavimo vienetu CD, b — skaičius, išreiškiantis atkarpos CD ilgį matavimo vienetu AB. Kaip susiję skaičiai a ir b?

2(323). Skaičius, išreiškiantis atkarpos AB ilgį matavimo vienetu E_1F_1, yra m; skaičius, išreiškiantis atkarpos AB ilgį matavimo vienetu E_2F_2 — n. Kokiu skaičiumi išreiškiamas atkarpos E_1F_1 ilgis matavimo vienetu E_2F_2?

3(324). Sakykime, $\angle hk$ — mažesnysis iš dviejų gretutinių kampų hk ir hl. Įrodykite, kad $\angle hk = 90° - \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$, $\angle hl = 90° + \frac{1}{2}(\angle hl - \angle hk)$.

4(325). Penkios tiesės susikerta viename taške (1 pav.). Raskite kampų 1, 2, 3, 4 ir 5 sumą.

5(326). Duotos šešios paporiui susikertančios tiesės. Per bet kurių dviejų tiesių susikirtimo tašką eina mažiausiai dar viena duotųjų tiesių. Įrodykite, kad visos tiesės eina per vieną tašką.

6(327). Duoti šeši taškai. Per bet kuriuos du taškus einanti tiesė eina mažiausiai dar per vieną tų taškų. Įrodykite, kad visi taškai yra vienoje tiesėje.

II. TRIKAMPIAI

7(328). Taškai C_1 ir C_2 yra skirtingose tiesės AB pusėse, $AC_1 = BC_2$, $\angle BAC_1 = \angle ABC_2$. Įrodykite, kad tiesė C_1C_2 eina per atkarpos AB vidurį.

8(329). Jei vieno trikampio kampas, prie jo esanti kraštinė ir kitų dviejų kraštinių suma atitinkamai lygūs kito

trikampio kampui, prie jo esančiai kraštinei ir kitų dviejų kraštinių sumai, tai tie trikampiai lygūs. Įrodykite.

9(330). Vieno trikampio kraštinė ir du kampai lygūs kito trikampio kuriai nors kraštinei ir kuriems nors dviem kampams. Ar tie trikampiai gali būti nelygūs?

10(331). Vieno trikampio dvi kraštinės ir kampas lygūs kito trikampio kurioms nors dviem kraštinėms ir kampui. Ar tie trikampiai gali būti nelygūs?

11(332). Atkarpos AB ir CD susikerta taške O, AC=AO=BO==BD. Įrodykite, kad OC=OD.

III—IV. LYGIAGREČIOS TIESĖS. TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ PRIEKLAUSOS

12(333). Trikampio ABC kampas A lygus α. Tiesės, einančios per priekampių, kurių viršūnės B ir C, pusiaukampines, susikerta taške O. Raskite kampą BOC.

13(334). Per kiekvieną trikampio viršūnę nubrėžta tiesė, statmena iš tos viršūnės išvestai trikampio pusiaukampinei. Tų tiesių atkarpos ir nagrinėjamo trikampio kraštinės nusako tris trikampius. Įrodykite, kad tų trikampių atitinkami kampai lygūs.

14(335). Išaiškinkite trikampio rūšį, kai: a) bet kurių dviejų kampų suma didesnė už 90°; b) kiekvienas kampas mažesnis už kitų dviejų kampų sumą.

15(336). Įrodykite, kad trikampio kampas yra smailusis, statusis arba bukasis, jei iš to kampo viršūnės nubrėžta pusiaukraštinė atitinkamai didesnė, lygi arba mažesnė už pusę prieš ją esančios kraštinės.

16(337). Lygiašonio trikampio ABC pagrindas BC, $\angle BAC=80°$, M — jo vidaus taškas. Be to, $\angle MBC=30°$, $\angle MCB=10°$. Raskite kampą AMC.

17(338). Įrodykite, kad kiekviena atkarpa, kurios galai yra skirtingose trikampio kraštinėse, ne didesnė už didžiausiąją trikampio kraštinę.

18(339). Atkarpa BB_1 — trikampio ABC pusiaukampinė. Įrodykite, kad $BA>B_1A$ ir $BC>B_1C$.

19(340). Trikampio ABC viduje parinktas taškas D taip, kad AD=AB. Įrodykite, kad AC>AB.

20(341). Trikampio ABC kraštinė AB didesnė už AC. Nubrėžta jo pusiaukampinė AD. Įrodykite, kad $\angle ADB>\angle ADC$ ir BD>CD.

21(342). Įrodykite teoremą: jei trikampio pusiaukampinė yra ir pusiaukraštinė, tai trikampis lygiašonis.

22(343). Dvi trikampio kraštinės nelygios. Įrodykite, kad iš jų bendros viršūnės nubrėžta pusiaukraštinė su mažesniąja kraštine sudaro didesnį kampą.

23(344). Trikampio ABC kraštinės AB ir AC nelygios: $AB \neq AC$. Nubrėžta atkarpa AM, jungianti viršūnę A ir bet kurį kraštinės BC tašką M. Įrodykite, kad trikampiai AMB ir AMC nelygūs.

24(345). Per trikampio ABC viršūnę A nubrėžta tiesė, statmena kampo A pusiaukampinei, o iš viršūnės B nuleistas į tą tiesę statmuo BH. Įrodykite, kad trikampio BCH perimetras didesnis už trikampio ABC perimetrą.

25(346). Trikampio ABC kraštinė AB mažesnė už kraštinę AC: $AB < AC$. Nubrėžtos pusiaukampinė AD ir aukštinė AH. Įrodykite, kad taškas H yra spindulyje DB.

26(347). Įrodykite, kad nelygiašonio trikampio pusiaukampinės pagrindas yra tarp pusiaukraštinės ir aukštinės pagrindų. Pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė nubrėžtos iš tos pačios viršūnės.

27(348). Stačiojo trikampio statiniai nelygūs. Įrodykite, kad stačiojo kampo pusiaukampinė kampą tarp aukštinės ir pusiaukraštinės, nubrėžtų iš tos pačios viršūnės, dalija pusiau.

28(349). Trikampio pusiaukraštinė ir aukštinė, nubrėžtos iš tos pačios trikampio viršūnės, trikampio kampą dalija į tris lygias dalis. Įrodykite, kad tas trikampis statusis.

29(350). Trikampio ABC aukštinė AA_1 ne mažesnė už kraštinę BC, o aukštinė BB_1 ne mažesnė už kraštinę AC. Įrodykite, kad trikampis ABC lygiašonis ir statusis.

30(352). Duoti du taškai A ir B bei per juos neinanti tiesė a. Nubrėžkite tiesės a tašką, vienodai nutolusį nuo taškų A ir B. Ar visada uždavinys turi sprendinį?

31(353). Nubrėžkite duoto apskritimo tašką, vienodai nutolusį nuo duotos atkarpos galų. Kiek sprendinių gali turėti šis uždavinys?

32(354). Per tris duotus taškus nubrėžkite apskritimą. Ar visada šis uždavinys turi sprendinį?

33(355). Taškai A ir B yra vienoje tiesės a pusėje. Nubrėžkite tokį tiesės a tašką M, kad suma $AM+MB$ būtų mažesnė už sumą $AX+XB$; čia X — bet kuris tiesės a taškas, nesutampantis su M.

34(356). Nubraižykite statųjį trikampį ABC, kai duotas smailusis kampas B ir pusiaukampinė BD.

35(357). Nubrėžkite duoto apskritimo tašką, vienodai nutolusį nuo dviejų susikertančiųjų tiesių. Kiek sprendinių gali turėti šis uždavinys?

36(358). Duotos trys paporiui susikertančios tiesės, neinančios per vieną tašką. Nubrėžkite tašką, vienodai nutolusį nuo tų tiesių. Kiek sprendinių turi šis uždavinys?

37(359). Duotas apskritimas, kurio centras O, ir šalia jo taškas A. Per tašką A nubrėžkite tiesę, kertančią apskritimą tokiuose taškuose B ir C, kad $AB=BC$.

38(360). Nubraižykite trikampį, kai duotas perimetras, kampas ir aukštinė, nubrėžta iš kito kampo viršūnės.

39(361). Nubraižykite trikampį, kai duotas perimetras ir du kampai.

40(362). Nubraižykite trikampį, kai duota kraštinė, kampų prie tos kraštinės skirtumas ir kitų dviejų kraštinių suma.

V. KETURKAMPIAI

41(811). Iškilojo šešiakampio $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ visi kampai lygūs. Įrodykite, kad $A_1A_2-A_4A_5=A_5A_6-A_2A_3=A_3A_4-A_6A_1$.

42(812). Teigiamieji skaičiai a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ir a_6 tenkina sąlygas $a_1-a_4=a_5-a_2=a_3-a_6$. Įrodykite, kad yra iškilasis šešiakampis $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, kurio visi kampai lygūs, $A_1A_2=a_1$, $A_2A_3=a_2$, $A_3A_4=a_3$, $A_4A_5=a_4$, $A_5A_6=a_5$, $A_6A_1=a_6$.

43(813). Įrodykite, kad iš bet kurio iškilojo keturkampio formos vienodų plytelių galima sudėti parketą.

44(814). Įrodykite, kad iškilojo keturkampio įstrižainės susikerta.

45(815). Įrodykite, kad bet kurio keturkampio dvi priešingosios viršūnės yra skirtingose pusėse nuo tiesės, einančios per kitas dvi viršūnes.

46(816). Nubrėžta lygiašonio trikampio ABC, kurio pagrindas AC, pusiaukampinė AD. Tiesė, einanti per tašką D ir statmena AD, tiesę AC kerta taške E. Taškai M ir K — statmenų, nuleistų iš taškų B ir D į tiesę AC, pagrindai. Raskite MK, kai $AE=a$.

47(817). Įrodykite, kad trikampio trijų pusiaukraštinių suma mažesnė už trikampio perimetrą, bet didesnė už pusę perimetro.

48(818). Iškilojo keturkampio įstrižainės jį dalija į keturis trikampius, kurių perimetrai lygūs. Įrodykite, kad tas keturkampis — rombas.

49(819). Tiesė neina per tašką. Raskite visų atkarpų, jungiančių tą tašką su visais minėtos tiesės taškais, vidurio taškų aibę.

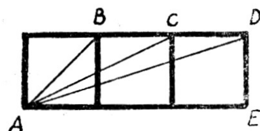
50(820). Įrodykite, kad tiesė, einanti per lygiašonės trapecijos pagrindų vidurio taškus, statmena pagrindams. Suformuluokite ir įrodykite atvirkštinį teiginį.

51(821). Susikirtus stačiakampio visų kampų pusiaukampinėms, gautas keturkampis. Įrodykite, kad tas keturkampis — kvadratas.

52(822). Lygiagretainio išorėje nubraižyti kvadratai, kurių kiekvieno kraštinė yra lygiagretainio kraštinė. Įrodykite, kad tų kvadratų įstrižainių susikirtimo taškai yra kvadrato viršūnės.

53(823). Kvadrato ABCD kraštinėje CD pažymėtas taškas M. Kampo BAM pusiaukampinė kraštinę BC kerta taške K. Įrodykite, kad AM=BK+DM.

54(824). 2 paveiksle pavaizduoti trys kvadratai. Raskite sumą $\angle BAE + \angle CAE + \angle DAE$.



2 pav.

55(825). Kvadrato ABCD viduje pažymėtas taškas M; $\angle MAB = 60°$, $\angle MCD = 15°$. Raskite $\angle MBC$.

56(826). Trikampio ABC išorėje nubraižyti kvadratai BCDE, ACTM, BAHK, po to lygiagretainiai TCDQ ir EBKP. Įrodykite, kad trikampis APQ statusis ir lygiašonis.

57(827). Nubraižykite lygiašonę trapeciją, kai duoti pagrindai ir įstrižainės.

58(828). Jei trikampis turi: a) simetrijos ašį, tai jis lygiašonis; b) daugiau nei vieną simetrijos ašį, tai jis lygiakraštis. Įrodykite.

VI. PLOTAI

59(829). Per lygiagretainio ABCD vidaus tašką M nubrėžtos jo kraštinėms lygiagrečios tiesės. Jos kraštines AB, BC, CD ir DA kerta taškuose P, Q, R ir T. Įrodykite: jei taškas M yra įstrižainėje AC, tai lygiagretainių MPBQ ir MRDT plotai lygūs ir, atvirkščiai, jei lygiagretainių MPBQ ir MRDT plotai lygūs, tai taškas M yra įstrižainėje AC.

60(830). Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti taškai M ir K. Atkarpos AK ir BM susikerta taške O. Trikam-

pių OMA, OAB, ir OBK plotai lygūs S_1, S_2 ir S_3. Raskite trikampio CMK plotą.

61(831). Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC pažymėti taškai M ir K, o atkarpoje MK — taškas P; $\frac{AM}{MC}=\frac{CK}{KB}=\frac{MP}{PK}$. Trikampių AMP ir BKP plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite trikampio ABC plotą.

62(832). P, Q, R ir T — lygiagretainio ABCD kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškai. Įrodykite, kad, susikirtus tiesėms AQ, BR, CT ir DP, gaunamas lygiagretainis. Raskite jo ploto ir lygiagretainio ABCD ploto santykį.

63(833). Įrodykite, kad trapecijos plotas lygus šoninės kraštinės ir statmens, nuleisto iš kitos šoninės kraštinės vidurio į tiesę, kurioje yra pirmoji šoninė kraštinė, sandaugai.

64(834). Trapecijos ABCD, kurios pagrindai BC ir AD, įstrižainės susikerta taške O. Trikampių BOC ir AOD plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite trapecijos plotą.

65(835). Per trapecijos mažesniojo pagrindo galus nubrėžtos dvi lygiagrečios tiesės, kertančios didesnįjį pagrindą. Trapecijos įstrižainės ir tos tiesės trapeciją dalija į septynis trikampius ir penkiakampį. Įrodykite, kad penkiakampio plotas lygus trijų trikampių, esančių prie šoninių kraštinių ir mažesniojo pagrindo, plotų sumai.

66(836). Tiesė, einanti per keturkampio ABCD įstrižainių AC ir BD vidurio taškus, kraštines AB ir CD kerta taškuose M ir K. Įrodykite, kad trikampių DCM ir AKB plotai lygūs.

67(837). Lygiagretainio ABCD kraštinė AB pratęsta nuo taško B iki taško E, o kraštinė AD — nuo taško D iki taško K. Tiesės ED ir KB susikerta taške O. Įrodykite, kad keturkampių ABOD ir CEOK plotai lygūs.

68(838). Dvi nesusikertančios atkarpos kiekvieną iš dviejų priešingų iškilojo keturkampio kraštinių dalija į tris lygias dalis. Įrodykite, kad tarp tų atkarpų esančios keturkampio dalies plotas tris kartus mažesnis už viso keturkampio plotą.

69(839). Iškilojo keturkampio ABCD kraštinių AB ir DC vidurio taškus K ir M ir viršūnes jungia atkarpos KD, KC, MA ir MB. Įrodykite, kad tarp tų atkarpų esančio keturkampio plotas lygus trikampių, esančių prie kraštinių AD ir BC, plotų sumai.

70(840). Taškas A yra 60° kampo viduje. Atstumai nuo taško A iki kampo kraštinių lygūs a ir b. Raskite atstumą nuo taško A iki kampo viršūnės.

71(841). Tiesė, einanti per lygiagretainio ABCD viršūnę C, tieses AB ir AD kerta taškuose K ir M. Trikampių KBC ir CDM plotai lygūs S_1 ir S_2. Raskite lygiagretainio plotą.

72(842). Per keturkampio ABCD įstrižainių susikirtimo tašką nubrėžta tiesė; atkarpą AB ji kerta taške M, o atkarpą CD — taške K. Tiesė, einanti per tašką K ir lygiagreti AB, tiesę BD kerta taške T, o tiesė, einanti per tašką M ir lygiagreti CD, tiesę AC kerta taške E. Įrodykite, kad tiesės BE ir CT lygiagrečios.

73(843). Trikampio ABC kraštinė AB pratęsta nuo taško A iki taško D; atkarpa AD lygi atkarpai AC. Spinduliuose BA ir BC pažymėti taškai K ir M; trikampių BDM ir BCK plotai lygūs. Raskite kampą BKM, kai $\angle BAC=\alpha$.

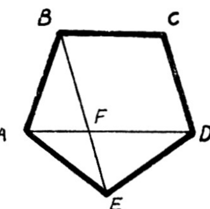
74(844). Stačiakampio ABCD viduje pažymėtas taškas M; $MB=a$, $MC=b$ ir $MD=c$. Raskite MA.

75(845). Nubrėžta trikampio ABC aukštinė BD. Atkarpa KA statmena AB ir lygi DC, atkarpa CM statmena BC ir lygi AD. Įrodykite, kad atkarpos MB ir KB lygios.

76(846). Taškas O — stačiojo trikampio ABC, kurio statusis kampas C, vidaus taškas; $S_{OAB}=S_{OAC}=S_{OBC}$. Įrodykite, kad $OA^2+OB^2=5OC^2$.

VII. PANAŠIEJI TRIKAMPIAI

77(847). 3 paveiksle pavaizduotas taisyklingasis penkiakampis ABCDE, t. y. iškilasis penkiakampis, kurio visi kampai lygūs ir visos kraštinės lygios. Įrodykite, kad: a) $\triangle AED \sim \triangle AFE$; b) $\frac{DA}{DF}=\frac{DF}{AF}$.



3 pav.

78(848). Per trikampio ABC ($AB \neq AC$) kraštinės BC vidurį M nubrėžta tiesė, lygiagreti kampo A pusiaukampinei; tieses AB ir AC ji kerta taškuose D ir E. Įrodykite, kad $BD=CE$.

79(849). Įrodykite, kad atkarpos, jungiančios smailiojo trikampio aukštinių pagrindus, sudaro trikampį, kurio pusiaukampinės yra tos aukštinės.

80(850). Taškai E ir F yra trikampio ABC kraštinėje AB; be to, taškas E yra atkarpoje AF ir $AE=BF$. Tiesė, nubrėžta per tašką E ir lygiagreti kraštinei AC, ir tiesė, nubrėžta per tašką F ir lygiagreti kraštinei BC, kertasi

taške K. Įrodykite, kad taškas K yra trikampio ABC pusiaukraštinėje, nubrėžtoje į kraštinę AB.

81(851). Stačiojo trikampio įžambinė yra jo nekertančio kvadrato kraštinė. Trikampio statinių suma lygi a. Raskite atstumą nuo kvadrato įstrižainių susikirtimo taško iki stačiojo kampo viršūnės.

82(852). Žinomi du trikampio ABC kampai: $\angle A=\frac{180^\circ}{7}$ ir $\angle B=\frac{360^\circ}{7}$. Įrodykite, kad $\frac{1}{BC}=\frac{1}{AC}+\frac{1}{AB}$.

83(853). Iš kampo AOB vidaus taško M nuleisti statmenys MP ir MQ į jo kraštines OA ir OB. Iš taškų P ir Q nuleisti statmenys PR ir QS į OB ir OA. Įrodykite, kad $RS\perp OM$.

84(854). Iš lygiašonio trikampio ABC pagrindo AC vidurio D nuleistas statmuo DH į kraštinę BC, M — atkarpos DH vidurys. Įrodykite, kad $BM\perp AH$.

85(855). Iš stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo viršūnės C nuleistas statmuo CD į įžambinę, o iš taško D — statmenys DE ir DF į statinius AC ir BC. Įrodykite, kad: a) $CD^3=AB\cdot AE\cdot BF$; b) $AE^2+BF^2+3CD^2=AB^2$; c) $\sqrt[3]{AE^2}+\sqrt[3]{BF^2}=\sqrt[3]{AB^2}$.

86(856). Iškilojo keturkampio ABCD įstrižainės susikerta taške P; $\angle ADP=\frac{1}{2}\angle PDC$, $\angle ADP=\frac{2}{3}\angle PAD$ ir $AD=BD=CD$.

a) Raskite visus keturkampio kampus. b) Įrodykite, kad $AB^2=BP\cdot BD$.

87(857). Taškas M nėra tose tiesėse, kuriose yra lygiagretainio ABCD kraštinės. Įrodykite, kad yra taškai N, P ir Q, jog A, B, C ir D — atkarpų MN, NP, PQ ir QM vidurio taškai.

88(858). Įrodykite: jei iškilojo keturkampio priešingos kraštinės nelygiagrečios, tai jų sumos pusė didesnė už atkarpą, jungiančią kitų dviejų priešingų kraštinių vidurio taškus.

89(859). Įrodykite: jei atstumų tarp iškilojo keturkampio priešingų kraštinių vidurio taškų suma lygi pusei jo perimetro, tai tas keturkampis — lygiagretainis.

90(860). Įrodykite: jei atkarpa, jungianti iškilojo keturkampio dviejų priešingų kraštinių vidurio taškus, lygi kitų dviejų kraštinių sumos pusei, tai tas keturkampis — trapecija arba lygiagretainis.

91(861). Trapecijos ABCD įstrižainės susikerta taške O; AB — trapecijos mažesnysis pagrindas, trikampis ABO — ly-

giakraštis. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės yra atkarpų OA, OD ir BC vidurio taškai — lygiakraštis.

92(862). Iš trikampio ABC viršūnės A nuleisti statmenys AM ir AK į to trikampio priekampių, kurių viršūnės B ir C, pusiaukampines. Įrodykite, kad atkarpa MK lygi pusei trikampio ABC perimetro.

93(863). Atkarpos AA_1, BB_1, CC_1 jungia trikampio ABC viršūnes su prieš jas esančių kraštinių vidaus taškais. Įrodykite, kad tų atkarpų vidurio taškai nėra vienoje tiesėje.

94(864). Trikampio visų trijų aukštinių vidurio taškai yra vienoje tiesėje. Įrodykite, kad tas trikampis statusis.

95(865). Trikampio ABC kraštinė AC du kartus didesnė už kraštinę BC. Nubrėžta pusiaukampinė CM ir priekampio, kurio viršūnė C, pusiaukampinė; ji tiesę AB kerta taške K. Įrodykite, kad $S_{BCM} = \frac{1}{2} S_{ACM} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{CMK}$.

96(866). Trikampio EFG kraštinės lygios trikampio ABC pusiaukraštinėms. Įrodykite, kad $\frac{S_{EFG}}{S_{ABC}} = \frac{3}{4}$.

97(867). Per trikampio ABC viršūnę A eina tiesė, kuri pusiaukraštinę BM dalija santykiu 1 : 2, pradedant nuo viršūnės, o kraštinę BC kerta taške K. Raskite trikampių ABK ir ABC plotų santykį.

98(868). Per lygiagretainio ABCD viršūnę A nubrėžta tiesė; ji tieses BD, CD ir BC kerta taškuose M, N ir P. Įrodykite, kad atkarpa AM yra atkarpų MN ir MP geometrinis vidurkis.

99(869). Raskite lygiašonės trapecijos didesniojo pagrindo tašką, kuris nuo duotos šoninės kraštinės būtų n kartų toliau nei nuo kitos (n=2, 3, 4).

100(870). Taškas C yra atkarpoje AB. Raskite tiesės AB tašką D, nesantį atkarpoje AB, kad būtų teisinga lygybė $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$. Ar visada uždavinys turi sprendinį?

101(871). Nubraižykite lygiašonį trikampį, kai duota pagrindo ir į jį nuleistos aukštinės suma ir kampas tarp šoninių kraštinių.

102(872). Nubraižykite trikampį, kai duotos dvi kraštinės ir kampo tarp jų pusiaukampinė.

103(873). Nubraižykite trikampį ABC, kai duoti $\angle A$, $\angle C$ bei atkarpa, lygi kraštinės AC ir aukštinės BH sumai.

104(874). Nubraižykite trikampį, kai duotos visos trys aukštinės.

105(875). Nubraižykite trapeciją, kai duota šoninė kraštinė, didesnysis pagrindas, kampas tarp jų ir kitų dviejų kraštinių santykis.

106(876). Nubraižykite rombą, kurio plotas būtų lygus duoto kvadrato plotui ir įstrižainių santykis būtų lygus duotų atkarpų santykiui.

VIII. APSKRITIMAS

107(877). Du apskritimai turi vienintelį bendrą tašką M. Per tą tašką nubrėžtos dvi kirstinės, kurios vieną apskritimą kerta taškuose A ir A_1, kitą — taškuose B ir B_1. Įrodykite, kad $AA_1 \parallel BB_1$.

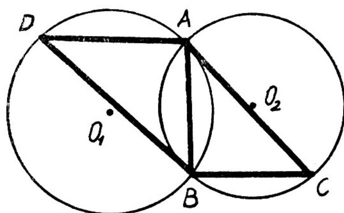
108(878). Tiesė AC — apskritimo, kurio centras O_1, liestinė, tiesė BD — apskritimo, kurio centras O_2, liestinė (4 pav.). Įrodykite, kad: a) $AD \parallel BC$; b) $AB^2 = AD \cdot BC$; c) $BD^2 : AC^2 = AD : BC$.

109(879). B_1 ir C_1 — lankų AB ir AC vidurio taškai (5 pav.). Įrodykite, kad $AM = AN$.

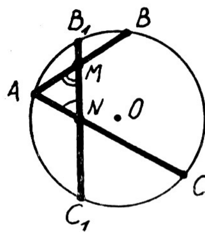
110(880). Dvi tiesės susikerta ne apskritimo taške. Apskritimas tose tiesėse iškerta lygias stygas. Įrodykite, kad atstumai nuo tų tiesių susikirtimo taško iki vienos ir kitos stygos galų atitinkamai lygūs.

111(881). AB — apskritimo styga, AD — atstumas nuo taško A iki liestinės taške B. Įrodykite, kad visų stygų AB santykio $\frac{AB^2}{AD}$ reikšmė ta pati.

112(882). Per dviejų apskritimų, kurių centrai O_1 ir O_2, susikirtimo tašką A nubrėžta tiesė. Ji vieną apskritimą kerta taške B, kitą — taške C. Įrodykite, kad didžiausią atkarpą BC gausime tada, kai ji bus lygiagreti atkarpai O_1O_2.



4 pav.



5 pav.

113(883). Atkarpa AB yra apskritimo, kurio centras O, skersmuo. Kiekviename apskritimo spindulyje OM nuo centro O atidėta atkarpa, lygi atstumui nuo to spindulio galo M iki tiesės AB. Raskite tų atkarpų galų aibę.

114(884). Lygiakraščio trikampio ABC kampo B viduje pažymėtas taškas M; $\angle BMC=30^\circ$, $\angle BMA=17^\circ$. Raskite kampus BAM ir BCM.

115(885). Per trikampio ABC kiekvieną viršūnę nubrėžta tiesė, statmena trikampio kampo prie tos viršūnės pusiaukampinei. Tos tiesės susikirsdamos sudaro naują trikampį. Įrodykite, kad to trikampio viršūnės yra tose pačiose tiesėse kaip ir trikampio ABC pusiaukampinės.

116(886). Tiesės, kuriose yra trikampio ABC aukštinės, susikerta taške H, o A^1, B^1, C^1 — taškai, simetriški taškui H tiesių BC, CA, AB atžvilgiu. Įrodykite, kad taškai A^1, B^1, C^1 yra apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo taškai.

117(887). Atkarpa BD — trikampio ABC pusiaukampinė. Įrodykite, kad $BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$.

118(888). Iš trikampio ABC viršūnės B nuleista aukštinė BH ir nubrėžta kampo B pusiaukampinė. Ji taške E kerta apie trikampį apibrėžtą apskritimą; to apskritimo centras O. Įrodykite, kad spindulys BE yra kampo OBH pusiaukampinė.

119(889). Apie lygiakraštį trikampį ABC apibrėžto apskritimo bet kuris taškas X atkarpomis sujungtas su trikampio viršūnėmis. Įrodykite, kad viena atkarpų AX, BX ir CX lygi kitų dviejų atkarpų sumai.

120(890). Įrodykite: jei įbrėžtinio keturkampio įstrižainės statmenos, tai keturkampio priešingų kraštinių kvadratų suma lygi apibrėžtinio apskritimo skersmens kvadratui.

121(891). Į apskritimą įbrėžto keturkampio ABCD kampų A ir B pusiaukampinės susikerta kraštinės CD taške. Įrodykite, kad $CD=BC+AD$.

122(892). Įrodykite, kad apie apskritimą apibrėžtos stačiosios trapecijos plotas lygus jos pagrindų sandaugai.

123(893). Įrodykite, kad bet kokio į apskritimą įbrėžto keturkampio įstrižainių sandauga lygi priešingų kraštinių sandaugų sumai (Ptolemėjo teorema).

124(894). Įrodykite, kad apie bet kokį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį R, į jį įbrėžto apskritimo spindulį r ir atstumą d tarp tų apskritimų centrų sieja lygybė $d^2=R^2-2Rr$ (Eulerio formulė).

125(895). Taškas O yra apie nelygiakraštį trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras, H — tiesių, kuriose yra aukštinės AA_1, BB_1, CC_1, susikirtimo taškas, A_2, B_2, C_2 — atkarpų AH, BH, CH vidurio taškai, A_3, B_3, C_3 — trikampio ABC kraštinių vidurio taškai. Įrodykite, kad taškai A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 priklauso vienam apskritimui (Eulerio apskritimas).

126(896). Įrodykite, kad iš bet kurio apie trikampį apibrėžto apskritimo taško į tieses, kuriose yra trikampio kraštinės, nuleistų statmenų pagrindai yra vienoje tiesėje (Simpsono tiesė).

127(897). Nubrėžkite dviejų duotų apskritimų bendrą liestinę.

128(898). Duotas apskritimas, kurio centras O, taškas M bei atkarpos P_1Q_1 ir P_2Q_2. Nubrėžkite tiesę p, kurioje apskritimas iškirstų stygą, lygią P_1Q_1, o atstumas nuo taško M iki tiesės p būtų lygus P_2Q_2.

129(899). Per apskritimo viduje duotą tašką nubrėžkite stygą, kuri būtų mažiausia iš visų stygų, einančių per tą tašką.

130(900). Nubraižykite trikampį, kai: a) duota kraštinė, prieš ją esantis kampas ir į tą kraštinę nuleista aukštinė; b) duotas kampas, iš to kampo viršūnės nuleista aukštinė ir perimetras.

131(901). Nubraižykite trikampį, kai duotas apie jį apibrėžtas apskritimas bei apskritimo taškai H, B ir M, per kuriuos eina tos tiesės, kuriose yra iš vienos viršūnės nubrėžtos aukštinė, pusiaukampinė ir pusiaukraštinė.

132(902). Duoti trys taškai, nesantys vienoje tiesėje. Nubraižykite trikampį, kurio aukštinių pagrindai būtų tie taškai. Kiek sprendinių turi uždavinys?

IX. VEKTORIAI

133(904). Duotas keturkampis MNPQ ir taškas O; $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$. Koks tas keturkampis?

134(905). Duotas keturkampis ABCD ir taškas O. Taškai E, F, G, H simetriški taškui O kraštinių AB, BC, CD ir DA vidurio taškų atžvilgiu. Koks yra keturkampis EFGH?

135(906). Duotas trikampis ABC. Įrodykite, kad vektorius $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ nukreiptas išilgai kampo A pusiaukampinės, o vektorius $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}-\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ — išilgai priekampio, kurio viršūnė A, pusiaukampinės.

136(907). Įrodykite šitokį teiginį: trys taškai A, B ir C vienai tiesei priklauso tada ir tik tada, kai yra skaičiai k, l ir m, kurių ne visi lygūs nuliui, bet $k+l+m=0$, $k\cdot\overrightarrow{OA}+l\cdot\overrightarrow{OB}+m\cdot\overrightarrow{OC}=0$; O — bet kuris taškas.

137(908). Taikydami vektorius įrodykite, kad keturkampio įstrižainių vidurio taškai ir atkarpų, jungiančių priešingų kraštinių vidurio taškus, susikirtimo taškas yra vienoje tiesėje.

138(909). Trikampio ABC priekampių, kurių viršūnės A, B ir C, pusiaukampinės tieses BC, CA ir AB kerta taškuose A_1, B_1 ir C_1. Taikydami vektorius įrodykite, kad taškai A_1, B_1 ir C_1 yra vienoje tiesėje.

139(910). Tiesės, kuriose yra nelygiakraščio trikampio ABC aukštinės, susikerta taške H, apie tą trikampį apibrėžto apskritimo centras — O. Taikydami vektorius įrodykite, kad trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas G priklauso atkarpai HO ir dalija tą atkarpą santykiu 2 : 1, t. y. $\frac{HG}{GO}=2$.

X. KOORDINAČIŲ METODAS

140(1184). Keturkampio ABCD viršūnių koordinatės šitokios: $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ ir $D(x_4;\ y_4)$. Įrodykite, kad tas keturkampis yra lygiagretainis tada ir tik tada, kai $x_1+x_3=x_2+x_4$ ir $y_1+y_3=y_2+y_4$.

141(1185). Duoti du taškai: $A(x_1;\ y_1)$ ir $B(x_2;\ y_2)$. Įrodykite, kad taško C, dalijančio atkarpą AB santykiu λ (t. y. $\frac{AC}{CB}=\lambda$), koordinatės (x; y) išreiškiamos formulėmis

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

142(1186). Iš fizikos žinoma, kad vienalytės trikampės plokštelės sunkio centras yra pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Raskite tokios plokštelės sunkio centro koordinates, kai žinomos jos viršūnių koordinatės:

$$A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;\ y_2),\ A_3(x_3;\ y_3).$$

143(1187). Trikampio ABC viršūnių koordinatės šitokios: A(−3; 0), B(0; 4), C (3; 0). Kampo A pusiaukampinė kraštinę BC kerta taške D. Raskite taško D koordinates.

144(1188). Trikampio ABC kraštinės AC=9 cm, BC=12 cm. Pusiaukraštinės AM ir BN viena kitai statmenos. Raskite AB.

145(1189). Raskite masių m_1, m_2, m_3, sukoncentruotų taškuose $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$, sunkio centro koordinates.

146(1190). Kiekvienu atveju raskite abscisių ašies tašką M, kad jo atstumų iki taškų A ir B suma būtų mažiausia: a) A(2; 3), B(4; −5); b) A(−2; 4), B(3; 1).

147(1191). Įrodykite, kad: a) lygtis $Ax+By+C=0$, kai A ir B kartu nelygūs nuliui, yra tiesės lygtis; b) lygtis $x^2-xy-2=0$ nėra apskritimo lygtis.

148(1192). Raskite apskritimų, kurių lygtys $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ ir $x^2+y^2=1$, susikirtimo taškų koordinates ir apskaičiuokite jų bendros stygos ilgį.

149(1193). Duoti trys taškai A, B, C ir trys skaičiai α, β, γ. Raskite visų taškų M, su kuriais sumos $\alpha \cdot AM^2+\beta \cdot BM^2+\gamma \cdot CM^2$ reikšmė pastovi, aibę, kai: a) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$; b) $\alpha+\beta+\gamma=0$.

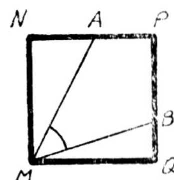
150(1194). Duota tiesė a ir šalia jos taškas A; kiekvienam tiesės a taškui M_1 priskiriamas spindulio AM_1 taškas M; $AM_1 \cdot AM=k$, k — teigiamas skaičius. Raskite visų taškų M aibę.

151(1195). Taškas O nėra duoto apskritimo taškas. Kiekvienam apskritimo taškui M_1 priskiriamas spindulio OM_1 taškas M; $OM=k \cdot OM_1$, k — teigiamas skaičius. Raskite visų taškų M aibę.

152(1196). Sakykime, A ir B — duoti taškai, k — duotas teigiamas skaičius, nelygus 1. a) Įrodykite, kad visų taškų M, tenkinančių sąlygą $AM=k \cdot BM$, aibė yra apskritimas (Apolonijo apskritimas). b) Įrodykite, kad tas apskritimas kerta kiekvieną apskritimą, einantį per taškus A ir B, o jų spinduliai, nubrėžti į susikirtimo tašką, vienas kitam statmeni.

XI. TRIKAMPIO KRAŠTINIŲ IR KAMPŲ PRIEKLAUSOS. VEKTORIŲ SKALIARINĖ SANDAUGA.

153(1197). Kvadrato MNPQ kraštinėse pažymėti taškai A ir B; $NA=\frac{1}{2}MN$, $QB=\frac{1}{3}MN$ (6 pav.). Įrodykite, kad $\angle AMB=45^0$.



6 pav.

154(1198). Keturkampio ABCD įstrižainės AC ir BD susikerta taške O. Trikampio ODC plotas yra trikampių OBC ir OAD plo-

tų geometrinis vidurkis. Įrodykite, kad ABCD — trapecija, kurios pagrindai AD ir BC, arba lygiagretainis.

155(1199). Keturkampio kraštinės (iš eilės) a, b, c, d. Įrodykite, kad jo plotas S tenkina nelygybę $S \leqslant \frac{1}{2}(ac+bd)$.

156(1200). Įrodykite, kad trikampio ABC pusiaukampinę AA_1 galima apskaičiuoti pagal formulę $AA_1 = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$; čia $b = AC$, $c = AB$.

157(1201). Įbrėžto į apskritimą keturkampio įstrižaines išreikškite jo kraštinėmis.

158(1202). Įrodykite, kad įbrėžto į apskritimą keturkampio plotą galima apskaičiuoti pagal formulę

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)};$$

čia p — keturkampio pusperimetris, a, b, c, d — jo kraštinės.

159(1203). Įrodykite, kad trikampio kraštinės aritmetinę progresiją sudaro tada ir tik tada, kai tiesė, einanti per įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų centrus, statmena vienai trikampio pusiaukampinei.

160(1204). Stačiosios trapecijos ABCD mažesnysis pagrindas AD lygus 3, o nestatmena pagrindams šoninė kraštinė CD lygi 6. Taškas E — atkarpos CD vidurys, kampas CBE lygus α. Raskite trapecijos ABCD plotą.

161(1205). Smailiojo trikampio ABC kraštinė AB didesnė už kraštinę BC, atkarpos AM ir CN — trikampio aukštinės, taškas O — apibrėžtinio apskritimo centras. Kampas ABC lygus β, o keturkampio NOMB plotas lygus S. Raskite kraštinę AC.

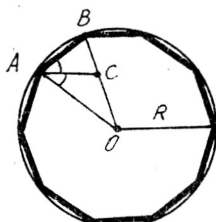
162(1206). Trikampio ABC aukštinės AH ilgis h, pusiaukraštinės AM ilgis l; AN — trikampio pusiaukampinė, taškas N — atkarpos MH vidurys. Raskite atstumą nuo viršūnės A iki trikampio ABC aukštinių susikirtimo taško.

XII. APSKRITIMO ILGIS IR SKRITULIO PLOTAS

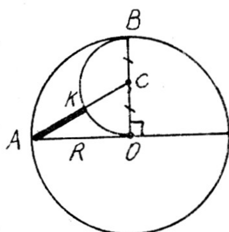
163(1207). 7 paveiksle pavaizduotas į apskritimą, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingasis dešimtkampis; AC — kampo OAB pusiaukampinė. Įrodykite, kad: a) $\triangle ABC \sim \triangle OAB$; b) $AB = AC = OC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R$.

164(1208). Įrodykite, kad 8 paveiksle pavaizduota atkarpa AK lygi į apskritimą, kurio centras O, įbrėžto taisyklingojo dešimtkampio kraštinei.

165(1209). Apie taisyklingąjį penkiakampį $A_1A_2A_3A_4A_5$ apibrėžtas apskritimas; apskritimo centras O. Trikampio ABC viršūnės yra penkiakampio kraštinių A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4 vidurio taškai. Įrodykite, kad taškas O ir į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras O_1 simetriški tiesės AC atžvilgiu.



7 pav.



8 pav.

166(1210). Į duotą apskritimą įbrėžkite taisyklingąjį dešimtkampį.

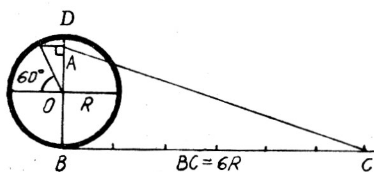
167(1211). Į duotą apskritimą įbrėžkite taisyklingąjį penkiakampį.

168(1212). Į duotą apskritimą įbrėžkite penkiakampę žvaigždę.

169(1213). Sakykime, M — bet kuris taisyklingojo n-kampio vidaus taškas. Įrodykite, kad statmenų, nuleistų iš taško M į tieses, kuriose yra n-kampio kraštinės, suma lygi nr; čia r — įbrėžtinio apskritimo spindulys.

170(1214). Trikampio kampai sudaro geometrinę progresiją, kurios vardiklis 2. Įrodykite, kad to trikampio kraštinių vidurio taškai ir aukštinių pagrindų taškai yra šešios taisyklingojo septynkampio viršūnės.

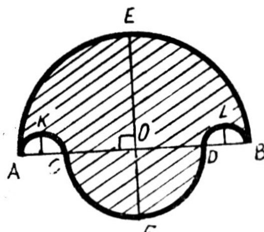
171(1215). Sakykime, ABCD — kvadratas, $A_1B_1C_1$ — taisyklingasis trikampis, įbrėžti į apskritimą, kurio spindulys R. Įrodykite, kad sumos $AB+A_1B_1$ reikšmė 0,01R tikslumu lygi pusapskritimio ilgiui.



9 pav.

172(1216). Remdamiesi 9 paveikslo duomenimis, įrodykite, kad atkarpos ilgis 0,001R tikslumu lygus apskritimo, kurio spindulys R, ilgiui.

173(1217). 10 paveiksle pavaizduoti keturi pusapskriti-



10 pav.

miai: AEB, AKC, CFD, DLB; AC=DB. Įrodykite, kad subrūkšniuotos figūros plotas lygus skritulio, kurio skersmuo — atkarpa EF, plotui.

174(1218). Nubrėžkite skritulio kraštą, kai skritulio plotas lygus: a) žiedo tarp dviejų duotų koncentrinių apskritimų plotui; b) duoto pusskritulio plotui; c) duotos skritulio išpjovos, kurią riboja 60° lankas, plotui.

XIII. JUDESIAI

175(1219). Judesys g tašką A atvaizduoja į tašką B, o tašką B — į tašką A. Įrodykite, kad g — centrinė simetrija arba ašinė simetrija.

176(1220). Duotos dvi lygios atkarpos: AB ir A_1B_1. Įrodykite, kad yra du ir tik du judesiai, kurie taškus A ir B atvaizduoja į taškus A_1 ir B_1.

177(1221). Įrodykite, kad du lygiagretainiai lygūs, kai vieno lygiagretainio įstrižainės ir kampas tarp jų lygūs kito lygiagretainio įstrižainėms ir kampui tarp jų.

178(1222). Įrodykite, kad dvi trapecijos lygios, kai vienos trapecijos pagrindai ir šoninės kraštinės lygūs kitos trapecijos pagrindams ir šoninėms kraštinėms.

179(1223). Įrodykite, kad du trikampiai lygūs, kai vieno trikampio dvi nelygios kraštinės ir prieš jas esančių kampų skirtumas lygūs kito trikampio dviem kraštinėms ir prieš jas esančių kampų skirtumui.

180(1224). Vieno lygiagretainio viršūnės yra kito lygiagretainio kraštinėse. Įrodykite, kad tų lygiagretainių įstrižainių susikirtimo taškai sutampa.

181(1225). Duoti du apskritimai ir tiesė. Nubraižykite taisyklingąjį trikampį, kurio dvi viršūnės būtų duotų apskritimų taškai (viena — vieno, kita — kito), o iš trečios viršūnės nuleista aukštinė būtų duotoje tiesėje.

182(1226). Kampo AOB, kurio viršūnė neprieinama, kraštinėje pažymėtas taškas M. Nubrėžkite atkarpą, lygią atkarpai OM.

183(1227). Duoti du susikertantys apskritimai. Nubrėžkite atkarpą, kurios galai būtų tų apskritimų taškai, o vidurys — vienas tų apskritimų susikirtimo taškų.

184(1228). Nubraižykite trikampį, kai duotos visos trys pusiaukraštinės.

185(1229). Nubraižykite trapeciją, kurios kraštinės lygios duotoms atkarpoms.

186(1230). Duoti du taškai A ir B bei dvi susikertančios tiesės c ir d. Nubraižykite lygiagretainį ABCD, kurio viršūnės C ir D būtų atitinkamai tiesėse c ir d.

187(1231). Duota tiesė, apskritimas ir jiems nepriklausantis taškas A. Nubraižykite kvadratą ABCD, kurio viršūnė B būtų duotoje tiesėje, o viršūnė D — duotame apskritime.

STEREOMETRIJA

188(764). Kampas tarp dviejų prasilenkiančiųjų tiesių lygus 90°. Kiekvienos d ilgio atkarpos galai yra tose tiesėse. Raskite visų tų atkarpų vidurio taškų aibę.

189(765). Tetraedro visos briaunos lygios. Tetraedras perkirstas plokštumomis, lygiagrečiomis dviem priešingoms briaunoms. Įrodykite, kad pjūvių perimetrai lygūs.

190(766). Įrodykite, kad tetraedro dviejų priešingųjų briaunų kvadratų suma du kartus didesnė už atkarpų, jungiančių kitų priešingų briaunų vidurio taškus, kvadratų sumą.

191(767). Yra žinoma, kad iš bet kurio lygiakraščio trikampio, galima suklijuoti tetraedrą, perlenkus trikampį pagal tris vidurines linijas ir suklijavus atitinkamas jo kraštinių dalis. Kokie turi būti trikampio kampai, kad iš jo nurodytu būdu suklijuotume tetraedrą?

192(768). Iš taško A, nesančio tiesėje BC, į einančias per ją plokštumas nuleisti statmenys. Raskite visų statmenų pagrindų aibę.

193(769). Įrodykite, kad jei viena tetraedro aukštinė eina per priešingosios sienos aukštinių susikirtimo tašką, tai ir kitos to tetraedro aukštinės eina per priešingųjų sienų aukštinių susikirtimo taškus.

194(770). Tetraedro OABC visi plokštieji kampai prie viršūnės O lygūs 90°. Įrodykite, kad trikampio AOB plotas lygus trikampių ABC ir O_1AB (O_1 — taško O projekcija plokštumoje ABC) plotų geometriniam vidurkiui.

195(771). Tetraedro OABC visi plokštieji kampai prie viršūnės O statieji. Įrodykite, kad trikampio ABC ploto kvadratas lygus kitų sienų plotų kvadratų sumai (erdvinė Pitagoro teorema).

196(772). Kiek yra plokštumų, kurių kiekviena vienodai nutolusi nuo keturių duotų taškų, nesančių vienoje plokštumoje?

197(773). Įrodykite, kad tiesė, kertanti dvi dvisienio kampo sienas, su jomis sudaro lygius kampus tada ir tik tada, kai susikirtimo taškai vienodai nutolę nuo briaunos.

198(774). Įrodykite, kad kubo pjūvis, gautas jį perkirtus plokštuma, gali būti taisyklingasis trikampis, kvadratas, taisyklingasis šešiakampis, tačiau negali būti taisyklingasis penkiakampis ir taisyklingasis daugiakampis, turintis daugiau negu šešias kraštines.

199(775). Įrodykite, kad atstumų nuo kubo viršūnių iki tiesės, einančios per kubo centrą, kvadratų suma nepriklauso nuo tos tiesės.

200(776). Kubą padalykite į šešis lygius tetraedrus.

201(777). Kambarys yra kubo formos. Briaunos viduryje tūnantis voras nori pagauti musę, tupinčią toliausiai nuo jo esančioje kubo viršūnėje. Kuriuo trumpiausiu keliu turi bėgti voras prie musės?

202(778). Įrodykite, kad kube galima išpjauti angą, pro kurią pralįstų tokių pat ir net didesnių matmenų kubas.

203(779). Taisyklingosios šešiakampės piramidės šoninės sienos plotas lygus S. Piramidė perkirsta plokštuma, einančia per piramidės aukštinės vidurio tašką ir lygiagrečia šoninės sienos plokštumai. Raskite gauto pjūvio plotą.

204(780). Kubo formos dėžutės briauna 1 cm. Į ją įdėtas taisyklingasis tetraedras. Kokia ilgiausia gali būti taisyklingojo tetraedro briauna?

205(781). Duotas kubas $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Įrodykite, kad tetraedrų AB_1CD_1 ir C_1BA_1D sankirta yra taisyklingasis oktaedras.

206(782). Įrodykite, kad iš bet kurio baigtinio skaičiaus poromis skirtingų kubų negalima padaryti stačiakampio gretasienio.

207(783). Kubo briauna lygi 1 cm. Bet kuriai jo sienai lygiagreti plokštuma kerta kubo viduje einančią laužtę ne daugiau kaip viename taške. Įrodykite, kad laužtės ilgis mažesnis už 3 cm; kad galima sudaryti minėtas savybes turinčią laužtę, kurios ilgis kiek norima mažai skirtųsi nuo 3 cm.

208(784). Įrodykite, kad kiekvieno iškilojo briaunainio sienų ir viršūnių skaičiaus suma 2 didesnė už briaunų skaičių (Eulerio teorema).

209(785). Įrodykite, kad taisyklingojo dodekaedro sienų centrai yra taisyklingojo ikosaedro viršūnės.

210(786). Įrodykite, kad taisyklingojo ikosaedro sienų centrai yra taisyklingojo dodekaedro viršūnės.

211(787). Taisyklingojo trikampio ABC kraštinė lygi a. Atkarpa AS, kurios ilgis a, statmena plokštumai ABC. Raskite atstumą ir kampą tarp tiesių AB ir SC.

212(788). Taisyklingojo trikampio ABC kraštinė lygi a. Vienakrypčiuose spinduliuose BD ir CE, statmenuose plokštumai ABC, parinkti taškai D ir E; $BD=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $CE=a\sqrt{2}$. Įrodykite, kad trikampis ADE statusis, ir raskite kampą tarp plokštumų ABC ir ADE.

213(789). Taikydami vektorius įrodykite, kad gretasienio keturių įstrižainių kvadratų suma lygi jo dvylikos briaunų kvadratų sumai.

214(790). Tetraedro OABC pagrindas ABC permatomas, o visos kitos sienos — veidrodžiai. Visi plokštieji kampai prie viršūnės O statieji. Šviesos spindulys patenka į tetraedrą kirsdamas pagrindą ABC bet kuriuo kampu. Įrodykite, kad atsispindėjęs nuo tetraedro sienų, jis išeis priešinga įėjimui kryptimi. (Šia savybe pagrįstas kampinis atšvaitas. Toks atšvaitas buvo paleistas į Mėnulį matuojant lazeriu jo nuotolį nuo Žemės.)

215(791). Iš taško A išeina keturi spinduliai: AB, AC, AD ir AE; $\angle BAC=60°$, $\angle BAD=\angle DAC=45°$, o spindulys AE statmenas plokštumai ABD. Raskite kampą CAE.

216(792). Įrodykite, kad tetraedro aukštinės susikerta viename taške tada ir tik tada, kai tetraedro priešingosios briaunos statmenos.

217(793). Tetraedro trys šoninės briaunos lygios viena kitai. Įrodykite, kad tiesė, su tomis briaunomis sudaranti lygius kampus, statmena pagrindo plokštumai.

218(794). Tetraedro OABC visi plokštieji kampai prie viršūnės O statieji. Įrodykite, kad viršūnės O projekcija plokštumoje ABC yra trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas.

219(795). Iš sferos taško išvestos trys paporiui statmenos stygos. Įrodykite, kad jų kvadratų suma nepriklauso nuo tų stygų padėties.

220(796). Plokštumos eina per tiesę, nekertančią rutulio. Raskite visų taip gautų rutulio pjūvių centrų aibę.

221(797). Raskite aibę visų taškų, iš kurių galima išvesti tris paporiui statmenas sferos liestines.

222(798). Į tetraedrą, kurio aukštinės h_1, h_2, h_3, h_4, įbrėžtas rutulys. Jo spindulys R. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4},$$

223(799). Kaip turi būti susiję trijų paporiui vienas kitą liečiančių rutulių spinduliai, kad galėtume išvesti rutulių bendrą liečiamąją plokštumą?

224(800). Ant plokštumos yra keturi rutuliai, kurių spindulys R, be to, trys jų paporiui liečia vienas kitą, o ketvirtasis — du iš jų. Ant tų rutulių iš viršaus padėti du mažesnio spindulio (r) rutuliai, kurie liečia vienas kitą, o kiekvienas jų — tris didesnius rutulius. Raskite mažesniųjų rutulių spindulį.

225(801). Ant plokštumos yra trys rutuliai, paporiui liečiantys vienas kitą. Kiekvieno jų spindulys R. Kūgio pagrindas yra toje plokštumoje, o minėti rutuliai liečia jį iš išorės. Kūgio aukštinė lygi λR. Raskite jo pagrindo spindulį.

226(802). Plokštumos AB_1C_1 ir A_1BC taisyklingąją trikampę prizmę $ABCA_1B_1C_1$ dalija į keturias dalis. Raskite tų dalių tūrių santykį.

227(803). Įrodykite, kad tetraedro tūris lygus $\frac{1}{6}abc\sin\varphi$; čia a ir b — priešingosios briaunos, o φ ir c — kampas tarp jų ir atstumas tarp jų.

228(804). Įrodykite, kad plokštuma, einanti per tetraedro briauną ir prieš ją esančios briaunos vidurio tašką, tetraedrą dalija į dvi dalis, kurių tūriai lygūs.

229(805). Piramidės OABCD pagrindas yra lygiagretainis ABCD. Kokiu santykiu piramidės tūrį dalija plokštuma, einanti per tiesę AB ir sienos OCD vidurinę liniją?

230(806). Vienoje iš trijų lygiagrečių tiesių, nesančių vienoje plokštumoje, pažymėta atkarpa AB, o kitose dviejose — taškai C ir D. Įrodykite, kad tetraedro ABCD tūris nepriklauso nuo taškų C ir D pasirinkimo.

231(807). E ir F — kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunų DC ir BB_1 vidurio taškai. Kubo briauna lygi 1 cm. Raskite tetraedro AD_1EF tūrį.

232(808). Dviejose lygiagrečiose plokštumose nubraižyti du daugiakampiai. Sujungus jų viršūnes atkarpomis, gautas briaunainis. Visos jo šoninės sienos yra trapecijos, trikampiai ir lygiagretainiai. Įrodykite, kad

$$V = \frac{H}{6}(S_1 + S_2 + 4S_3);$$

čia V — briaunainio tūris, H — jo aukštinė, S_1 ir S_2 — pagrindų plotai, o S_3 — pjūvio, gauto briaunainį perkirtus plokštuma, lygiagrečia pagrindų plokštumoms ir vienodai nutolusia nuo jų, plotas.

233(809). Du lygūs ritiniai, kurių spindulys lygus 1 cm, o aukštinės didesnės už jų skersmenis, padėti taip, kad jų ašys susikertą stačiu kampu. Susikirtimo taškas yra

vienodai nutolęs nuo ritinių pagrindų. Raskite tų ritinių bendros dalies tūrį.

234(810). Apie rutulį apibrėžtas kūgis, kurio ašinio pjūvio viršūnės kampas α. Su kokia α reikšme kūgio tūris mažiausias?

235(811). Į kūgį įbrėžtas rutulys. Įrodykite, kad kūgio ir rutulio tūrių santykis lygus kūgio paviršiaus ir rutulį ribojančios sferos plotų santykiui.

236(812). Taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios pagrindo kraštinė a, o plokščiasis kampas prie viršūnės α, sukama apie tiesę, einančią per viršūnę ir lygiagrečią pagrindo kraštinei. Raskite gauto sukimosi kūno tūrį.

237(813). Rutulys gautas pusskritulį apsukus apie tiesę, kurioje yra jo skersmuo. Paviršius, gautas apsukus tam tikrą stygą, kurios vienas galas sutampa su nagrinėjamo skersmens galu, rutulį dalija į dvi lygiatūres dalis. Raskite kampo tarp tos stygos ir skersmens kosinusą.

238(814). Visos tetraedro aukštinės susikerta taške H, apie tetraedrą apibrėžtos sferos centras — taškas O, priešingųjų sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškus ir tetraedro viršūnes jungiančių atkarpų susikirtimo taškas G. Įrodykite, kad taškai H, O ir G yra vienoje tiesėje (Eulerio tiesė), be to, taškai O ir H simetriški taško G atžvilgiu.

239(815). Tetraedro visos aukštinės susikerta viename taške. Įrodykite, kad visų sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškai, tetraedro aukštinių pagrindai ir taškai, kurie kiekvieną atkarpą, jungiančią aukštinių susikirtimo tašką su viršūnėmis, dalija santykiu 2 : 1, pradedant nuo viršūnės, priklauso vienai sferai (Eulerio sfera), kurios centras yra Eulerio tiesėje.

SPRENDIMAI

1. Kadangi atkarpoje AB atkarpa CD telpa a kartų, tai $\frac{AB}{CD}=$ $=a$. Kadangi atkarpoje CD atkarpa AB telpa b kartų, tai $\frac{CD}{AB}=b$. Tada $a\cdot b=\frac{AB}{CD}\cdot\frac{CD}{AB}=1$.

2. Kadangi $\frac{AB}{E_1F_1}=m$, $\frac{AB}{E_2F_2}=n$, tai $\frac{E_1F_1}{E_2F_2}=\frac{E_1F_1}{AB}\cdot\frac{AB}{E_2F_2}=\frac{n}{m}$.

3. Kampai hk ir hl yra gretutiniai, todėl

$$\angle hk+\angle hl=180^\circ. \quad (1)$$

Iš čia $\angle hk=180^\circ-\angle hl$. Pridedame prie abiejų lygybės pusių $\angle hk$: $2\angle hk=180^\circ-(\angle hl-\angle hk)$. Iš čia

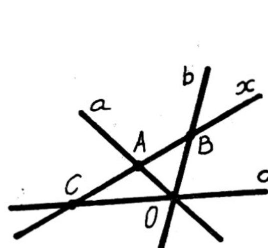
$$\angle hk=90^\circ-\frac{1}{2}(\angle hl-\angle hk). \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) gauname: $\angle hl=180^\circ-\angle hk=180^\circ-(90^\circ-\frac{1}{2}\cdot(\angle hl-$ $-\angle hk))=90^\circ+\frac{1}{2}(\angle hl-\angle hk)$.

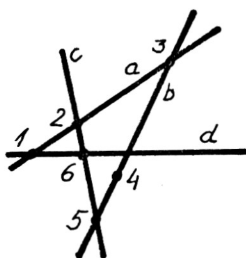
4. Kampų 1, 2, 3, 4, 5 (žr. 1 pav., 7 p.) kryžminius kampus pažymėkime 6, 7, 8, 9, 10. Visų dešimties kampų suma yra 360°. Kadangi kryžminiai kampai yra lygūs, tai $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+$ $+\angle 5=180^\circ$.

5. Sakykime, duotos tiesės a, b, c, x, y, z. Tiesių a ir b susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Pagal sąlygą per tašką O eina mažiausiai dar viena tiesė, pavyzdžiui, c (11 pav.). Tarkime, kad tiesė x neina per tašką O, o kerta tieses a, b, c atitinkamai taškuose A, B ir C. Jokie du iš šitų taškų negali sutapti. Jei, pavyzdžiui, sutaptų taškai A ir B, tai sutaptų tiesės OA ir OB, t. y. a ir b. Pagal sąlygą per tašką B turi eiti mažiausiai dar viena tiesė. Tai negali būti nei a, nei c, nes jos kerta tiesę b taške O. Tegul tai bus tiesė y. Per tašką A irgi turi eiti mažiausiai dar viena tiesė. Tai gali būti tik tiesė z. Bet tada per tašką C jau negali eiti jokia trečia tiesė, kas prieštarauja sąlygai. Taigi tarę, kad tiesė x neina per tašką O, gavome teiginį, prieštaraujantį uždavinio sąlygai.

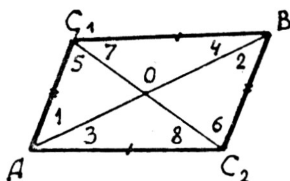
Vadinasi, tiesė x eina per tašką O.



11 pav.



12 pav.

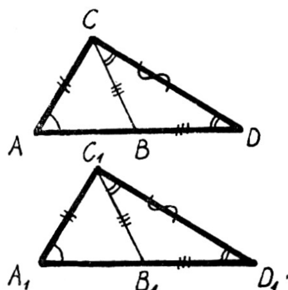


13 pav.

Taip pat gautume, kad tiesės y ir z eina per tašką O. Iš to išeina, kad visos šešios tiesės eina per tašką O.

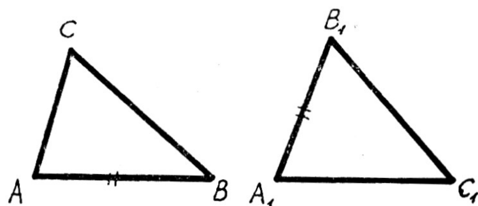
6. Per taškus 1 ir 2 nubrėžkime tiesę a (12 pav.). Pagal sąlygą dar mažiausiai vienas taškas yra toje tiesėje. Sakykime, tai taškas 3. Jei taškas 4 nėra tiesėje a, tai per jį ir tašką 3 nubrėžkime tiesę b. Pagal sąlygą tiesėje b yra dar mažiausiai vienas iš duotųjų taškų. Juo negali būti taškai 1 ir 2, nes tada sutaptų tiesės a ir b ir taškas 4 būtų tiesėje a. Sakykime taškas 5 yra tiesėje b. Per taškus 5 ir 2 nubrėžkime tiesę c, kuri turi eiti ir per tašką 6. Tiesėje d, einančioje per taškus 1 ir 6 jau negali būti nė vieno iš duotų šešių taškų. Gavome prieštaravimą. Todėl taškas 4 yra tiesėje a. Panašiai gautume, kad taškai 5 ir 6 yra tiesėje a. Todėl visi šeši taškai yra vienoje tiesėje.

7. Pagal sąlygą $\angle 1=\angle 2$ ir $AC_1=BC_2$ (13 pav.), todėl $\triangle ABC_1=$ $=\triangle BAC_2$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Iš čia: $\angle 4=$ $=\angle 3$ ir $\angle 5+\angle 7=\angle 6+\angle 8$ ($\angle C_1=\angle C_2$), $BC_1=AC_2$. Tada $\triangle C_1C_2B=\triangle C_2C_1A$ pagal dvi kraštines ($BC_1=AC_2$, $BC_2=AC_1$) ir kampą tarp jų. Vadinasi $\angle 7=\angle 8$ ir $\angle 5=\angle 6$. Iš to išeina, kad $\triangle AOC_1=\triangle BOC_2$ (pagal kraštinę ir du kampus prie jos). Iš čia $AO=BO$.

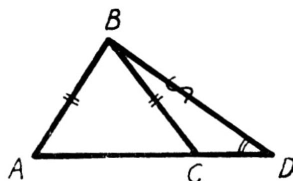


14 pav.

8. Nagrinėkime trikampius ABC ir $A_1B_1C_1$ (14 pav.). Pagal sąlygą $\angle A=\angle A_1$, $AC=A_1C_1$, $AB+BC=A_1B_1+B_1C_1$. Atidėkime $BD=BC$ ir $B_1D_1=B_1C_1$. Nubrėžę CD ir C_1D_1, gausime lygius trikampius: $\triangle ADC=$ $=\triangle A_1D_1C_1$ pagal dvi kraštines ($AC=$ $=A_1C_1$ ir $AD=A_1D_1$) ir kampą tarp jų. Todėl $\angle ACD=\angle A_1C_1D_1$, $\angle D=\angle D_1$, $DC=$ $=D_1C_1$. Kadangi trikampiai BCD ir $B_1C_1D_1$ – lygiašoniai, tai $\angle BCD=CDB$, $\angle C_1D_1B_1=\angle B_1C_1D_1$. Kadangi $\angle CDB=$ $=\angle C_1D_1B_1$, tai $\angle BCD=\angle B_1C_1D_1$. Tačiau $\angle ACB=\angle ACD-\angle BCD$, $\angle A_1C_1B_1=\angle A_1C_1D_1-\angle B_1C_1D_1$, todėl $\angle ACB=\angle A_1C_1B_1$, o



15 pav.



16 pav.

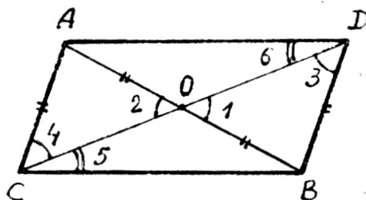
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ pagal kraštinę ($AC = A_1C_1$) ir du kampus prie jos.

9. Jei $\angle ABC \neq \angle A_1B_1C_1$, tai $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$, nors ir $AB = A_1B_1$, $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$, $\angle ACB = \angle A_1B_1C_1$ (15 pav.). Iš tikrųjų, jei $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, tai iš $AB = A_1B_1$ ir $\angle CAB = \angle C_1A_1B_1$ išeina, kad $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Bet tai prieštarauja sąlygai $\angle ABC \neq \angle A_1B_1C_1$.

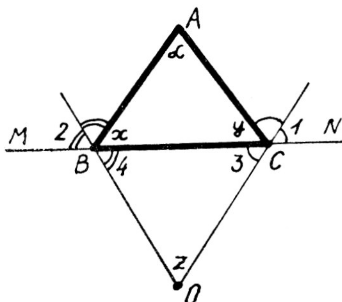
10. Tegul $AB = BC$ (16 pav.). Nagrinėkime trikampius ABD ir CBD. Tų trikampių $AB = CB$, BD — bendra kraštinė ir D — bendras kampas. Iš to išeina, kad trikampiai ABD ir BCD tenkina uždavinio sąlygą. Bet jie yra nelygūs, nes trikampio ABD negalima sutapdinti su trikampiu BCD: vienas trikampis yra kito dalis.

11. Pagal sąlygą $AC = AO = BO = BD$ (17 pav.). Trikampiai CAO ir DBO lygiašoniai, todėl $\angle 2 = \angle 4$ ir $\angle 1 = \angle 3$. Bet $\angle 1 = \angle 2$ kaip kryžminiai, todėl ir $\angle 3 = \angle 4$. Taigi $\triangle ACD = \triangle BDC$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų), todėl $\angle 6 = \angle 5$, $\angle CAD = \angle DBC$, $AD = BC$. Kadangi $\angle 3 + \angle 6 = \angle 4 + \angle 5$, tai $\triangle ADB = \triangle BCA$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Tada $\angle DBA = \angle CAB$. Dabar gauname, kad $\triangle ACO = \triangle BDO$ pagal kraštinę ($AC = BD$) ir du kampus prie jos. Iš čia $CO = DO$.

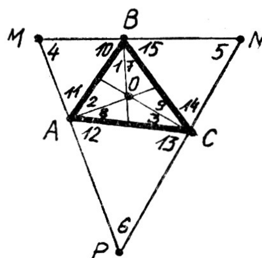
12. Pažymėkime kampus taip, kaip tai parodyta 18 paveiksle. Iš lygybės $x + y + \alpha = 180°$ išeina: $x + y = 180° - \alpha$. Kadangi



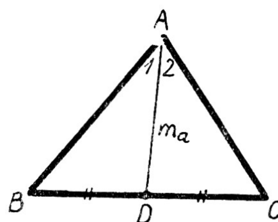
17 pav.



18 pav.



19 pav.



20 pav.

∠ACN=180°−y, ∠ABM=180°−x, tai ∠1=½ ∠ACN=90°−½ y, ∠2=½ ∠ABM=90°−½ x. Tačiau ∠3=∠1, ∠4=∠2; ∠3+∠4+z=180°, todėl z=180°−(∠3+∠4)=180°−(∠1+∠2)=½(x+y)=½(180°−α)=90°−α/2.

13. Pagal sąlygą (19 pav.) ∠1=∠7, ∠2=∠8, ∠3=∠9; ∠MBO=∠NBO=90°, ∠NCO=∠PCO=90°, ∠PAO=∠MAO=90°. Trikampio kampų suma lygi 180°, todėl ∠1+∠7+∠2+∠8+∠3+∠9=180°. Iš čia, atsižvelgę į sąlygą, gauname: ∠1+∠2+∠3=90°; ∠3=90°−(∠1+∠2).

1) Trikampio ABM: ∠10=90°−∠1, ∠11=90°−∠2; ∠4=180°−(∠10+∠11)=∠1+∠2.

2) Trikampio BNC: ∠15=90°−∠1; ∠14=90°−∠3=∠1+∠2; ∠5=180°−(∠14+∠15)=90°−∠2.

3) Trikampio ACP: ∠12=90°−∠2, ∠13=90°−∠3=∠1+∠2, ∠6=180°−(∠12+∠13)=90°−∠1.

Teiginys įrodytas.

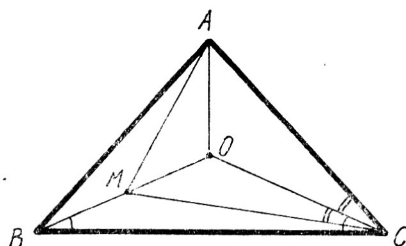
14. a) Trikampio kampų suma lygi 180°. Jei bet kurių dviejų trikampio kampų suma yra didesnė už 90°, tai trečiasis kampas yra mažesnis nei 90°, tai yra smailusis. Vadinasi, tokio trikampio visi kampai smailieji. Trikampis — smailusis.

b) Sakykime trikampyje ABC ∠A<∠B+∠C. Tada ∠A+∠A<∠A+∠B+∠C, 2∠A<180°, iš čia gauname, kad ∠A<90°.

Taip pat galime įrodyti imant kitus du trikampio kampus. Vadinasi, trikampis ABC — smailusis.

15. Tarkime, kad BD=DC, AD=m_a, ∠1+∠2=∠A (20 pav.). Remsimės tuo, kad prieš didesnę trikampio kraštinę yra didesnis jo kampas.

1) Jei m_a>DC, m_a>BD, tai ∠C>∠2 ir ∠B>∠1. Iš čia ∠B+∠C>∠1+∠2=∠A. Bet ∠B+∠C=180°−∠A, todėl 180°−∠A>∠A; ∠A<90°. Vadinasi, ∠A — smailusis.



21 pav.

2) Jei $m_a < DC$, $m_a < BD$, tai $\angle C < \angle 2$ ir $\angle B < \angle 1$. Iš čia $\angle B + \angle C < \angle A$; $180^0 - \angle A < \angle A$, $\angle A > 90^0$. Vadinasi, $\angle A$ — bukasis.

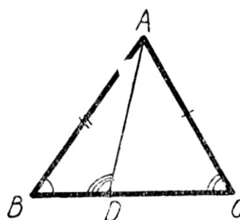
3) Jei $m_a = DC = BD$, tai trikampiai ADC ir ADB yra lygiašoniai ir kadangi $\angle ADC = \angle ADB = 90^0$, tai $\angle DAC = \angle DCA = 45^0$, $\angle DAB = \angle DBA = 45^0$. Vadinasi, $\angle A$ — statusis.

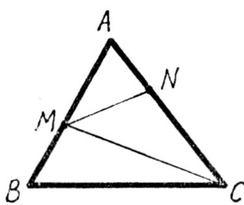
16. Pagal uždavinio sąlygą $\angle MBC = 30°$, $\angle MCB = 10°$, $\angle BAC = 80°$ (21 pav.). Išveskime kampo A pusiaukampinę. Jos ir tiesės BM susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Kadangi $\triangle ABC$ lygiašonis ir $\angle A = 80°$, tai $\angle B = \angle C = 50°$. Lygiašonio trikampio pusiaukampinė, išvesta į pagrindą, yra ir aukštinė, todėl taškas O yra atkarpos BC vidurio statmens taškas, $OB = OC$. Trikampis BOC lygiašonis, todėl $\angle OCB = \angle OBC = 30°$. Vadinasi, $\angle ACO = \angle ACB - \angle OCB = 20°$. Tada $\angle OCM = \angle OCB - \angle MCB = 30° - 10° = 20°$, $\angle BMC = 180° - (\angle MBC + \angle MCB) = 180° - (30° + 10°) = 140°$, $\angle OMC = 180° - 140° = 40°$. Vadinasi, $\angle MOC = 180° - 40° - 20° = 120°$. Kadangi AO — kampo BAC pusiaukampinė, tai $\angle CAO = 1/2\ \angle A = 40°$. Trikampių MOC ir AOC kampai lygūs ir kraštinė OC — bendra. Vadinasi, jie yra lygūs ir $AC = MC$. Iš to išeina, kad $\triangle ACM$ lygiašonis, todėl $\angle AMC = \angle MAC = 1/2\,(180° - \angle ACM) = 1/2(180° - (20° + 20°)) = 70°$.

17. Iš pradžių įrodysime, kad atkarpa, jungianti trikampio viršūnę su priešais esančios kraštinės tašku, yra mažesnė už didesniąją iš dviejų likusių kraštinių. Tarkime, kad $AB > AC$ (22 pav., a). Tada trikampio ABC $\angle C > \angle B$. Kampas ADB yra trikampio ACD priekampis, todėl jis didesnis už kampą C ($\angle D > \angle C$). Vadinasi, $\angle D > \angle B$. Taigi trikampio ABD $AB > AD$.

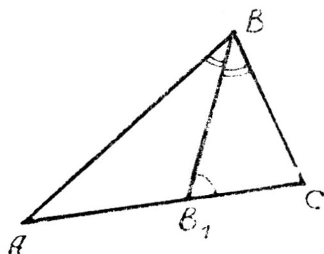
Tarkime, kad MN — atkarpa, duota uždavinio sąlygoje, ir AC — didžiausia trikampio ABC kraštinė (22 pav., b). Remiantis anksčiau įrodytu teiginiu, CM nedidesnė už AC. Todėl trikampio AMC kraštinė AC yra didžiausia. Pritaikę trikampio AMC atkarpai MN tai, kas buvo pasakyta anksčiau, gausime, kad MN nedidesnė už didesnę iš kraštinių AM ir MC. Bet AM ir MC yra mažesnės už AC. Iš to išeina, kad MN nedidesnė už AC — didžiausią iš trikampio ABC kraštinių.

18. $\angle BB_1C > \angle B_1BA$ kaip trikampio ABB_1 priekampis (23 pav.). Bet $\angle ABB_1 = \angle B_1BC$, todėl $\angle BB_1C > \angle B_1BC$ ir trikampio B_1BC:





22 pav.



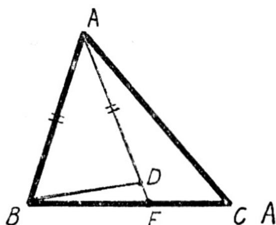
23 pav.

BC>B_1C. Analogiškai $\angle AB_1B > \angle B_1BC = \angle B_1BA$ ir todėl trikampio ABB_1 : $AB > AB_1$.

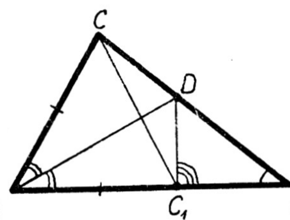
19. Pratęsiame AD iki susikirtimo su BC taške F (24 pav.). Pagal tai, kas buvo pasakyta 17 uždavinio sprendime, atkarpa AF yra mažesnė už didesnę iš kraštinių AB ir AC. Kadangi $AB = AD < AF$, tai didesnė bus kraštinė AC. Todėl $AC > AF > AD = AB$. Iš čia $AC > AB$.

20. Atidėkime $AC_1 = AC$ ir sujunkime C_1 su D (25 pav.). Gausime lygius trikampius: $\triangle ACD = \triangle AC_1D$ pagal dvi kraštines ($AC = AC_1$, AD — bendra kraštinė) ir kampą tarp jų. Iš čia gauname, kad $\angle CDA = \angle C_1DA$. Kadangi $\angle BDA > \angle C_1DA = \angle CDA$, tai vieną uždavinio teiginį mes įrodėme. Trikampio priekampis didesnis už jam negretutinį trikampio kampą, todėl $\angle BC_1D > \angle C_1DA = \angle CDA > \angle DBA$. Iš to išeina, kad $\angle BC_1D > \angle DBA$. Bet tada $BD > DC_1 = DC$.

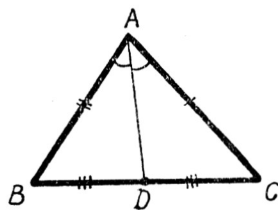
21. Tarkime, kad AD — trikampio ABC pusiaukampinė ir pusiaukraštinė (26 pav.). Reikia įrodyti, kad $AB = AC$. Sakykime, kad taip nėra, pavyzdžiui, $AB > AC$. Tada, remiantis 20 uždavinio sprendimu, $DB > DC$. Gavome prieštarą sąlygai $BD = DC$. Analogiškai įsitikintume, kad negali būti $AB < AC$. Vadinasi, $AB = AC$, taigi ABC — lygiašonis trikampis.



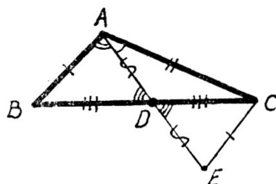
24 pav.



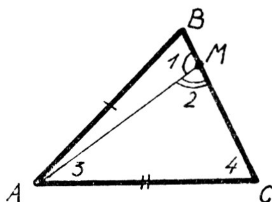
25 pav.



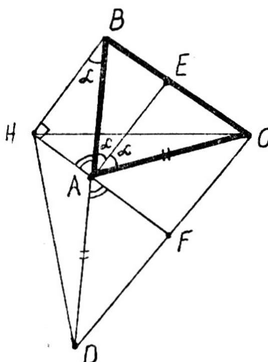
26 pav.



27 pav.



28 pav.



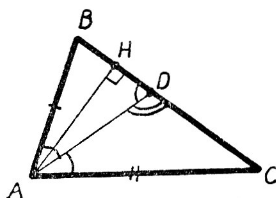
29 pav.

22. Tarkime, kad AD — trikampio ABC, kurio $AC>AB$, pusiaukraštinė (27 pav.). Įrodysime, kad $\angle BAD>\angle DAC$. Atidėkime $DE=AD$. Nubrėžkime EC. Gausime lygius trikampius: $\triangle ABD=\triangle ECD$ pagal dvi kraštines ($AD=ED$, $BD=CD$) ir kampą tarp jų. Vadinasi, $EC=AB$ ir $\angle DEC=\angle DAB$. Kadangi pagal sąlygą $AC>AB$, tai trikampio AEC $AC>EC$. Bet tada $\angle AEC>$ $>\angle CAE$, t. y. $\angle BAD>\angle DAC$.

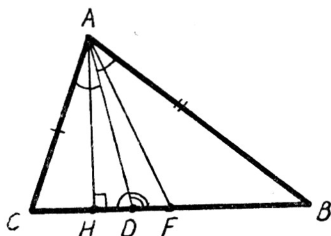
23. Kampas AMB trikampio AMC priekampis (28 pav.), todėl $\angle 1\neq\angle 3$, $\angle 1\neq\angle 4$. Vadinasi, jei mes bandysime sutapdinti trikampius AMC ir AMB, tai $\angle 2$ reikės sutapdinti su $\angle 1$. Bet tada trikampiai nesutaps, nes $AB\neq AC$. Iš to išeina, kad $\triangle AMB\neq$ $\neq\triangle AMC$.

24. Kadangi $BH\perp HF$ ir $AE\perp HF$, tai $HB\parallel AE$ ir $\angle HBA=\angle EAB$ (29 pav.). Pažymėkime šiuos kampus raide α. Tada ir $\angle EAC=\alpha$. Kadangi $P_{\triangle BCH}=BC+HB+HC$, $P_{\triangle ABC}=BC+AB+AC$, tai užtenka įrodyti, kad $HB+HC>AB+AC$. Pratęsę BA, atidėkime $AD=AC$ ir sujunkime tašką D su H ir C. Nagrinėkime trikampius HAC ir HAD. Jų $\angle HAC=\angle HAE+\angle EAC=90°+\alpha$, $\angle DAF=\angle HAB=$ $=\angle HAE-\angle BAE=90°-\alpha$, $\angle HAD=180°-\angle DAF=90°+\alpha$. Vadinasi, $\angle HAC=\angle HAD$. Taigi $\triangle HAC=\triangle HAD$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Iš čia $HD=HC$. Trikampio HBD kraštinė BD mažesnė už kitų dviejų kraštinių sumą: $BD<HB+HD$. Tačiau $BD=AB+AC$, $HB+HD=HB+HC$. Taigi $AB+AC<HB+HC$. Tai ir reikėjo įrodyti.

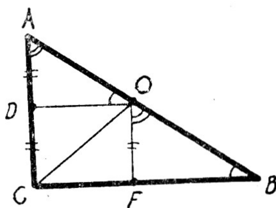
25. Pagal tai, kas buvo įrodyta sprendžiant 20 uždavinį, $\angle ADC>\angle ADB$ (30 pav.). Bet šie kampai yra gretutiniai, todėl $\angle ADH$ — smailusis, o $\angle ADC$ — bukasis. Jei taškas H būtų spin-



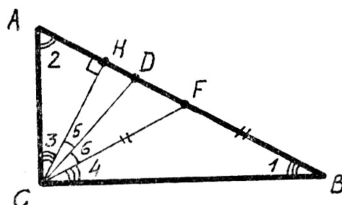
30 pav.



31 pav.



a)



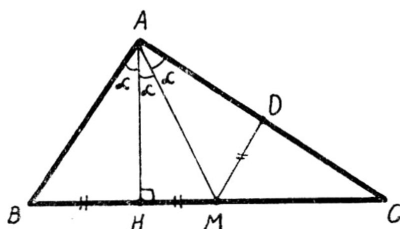
b)

32 pav.

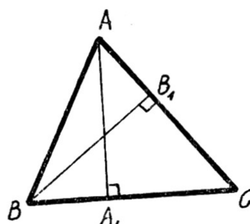
dulyje DC, tai trikampio ADH vienas kampas būtų statusis (∠H) ir vienas kampas būtų bukasis (∠D). Tai neįmanoma, nes trikampio kampų suma lygi 180°. Iš to išeina, kad taškas H yra spindulyje DB.

26. Sakykime, ABC — nelygiašonis trikampis (31 pav.). Tarkime, kad AB>AC, AD, AF ir AH — pusiaukampinė, pusiaukraštinė ir aukštinė. Pagal tai, kas buvo įrodyta sprendžiant 20 uždavinį, DB>DC ir ∠ADB>∠ADC. Iš pirmosios nelygybės išeina, kad pusiaukraštinės AF pagrindas F turi būti atkarpoje DB (FB=FC). Iš antrosios nelygybės ir iš to, kas buvo pasakyta sprendžiant 25 uždavinį, išeina, kad aukštinės AH pagrindas H turi būti spindulyje DC. Taigi pusiaukampinės pagrindas yra tarp aukštinės ir pusiaukraštinės pagrindų.

27. Iš pradžių įrodysime, kad AO=BO=CO (O — įžambinės vidurio taškas; 32 pav., a). Išveskime OD||BC, OF||AC. Gausime du lygius trikampius: △OFB=△ADO pagal įžambinę ir smailųjį kampą (∠OBF=∠ACD). Vadinasi, AD=OF. Stačiųjų trikampių COD ir FCO įžambinė CO bendra, ∠COD=∠FCO, todėl tie trikampiai lygūs: △COD=△COF. Todėl OF=CD. Vadinasi, AD==CD. Iš to gauname: OF=DC. Iš AD=OF ir OF=DC gauname: AD=DC. Taigi △ADO=△CDO (pagal du statinius). Iš čia AO==CO. Teiginys įrodytas.



33 pav.



34 pav.

Sakykime, stačiojo trikampio ABC aukštinė — CH, pusiaukampinė — CD, pusiaukraštinė — CF (32 pav., b). Be to, BC>AC. Įrodysime, kad $\angle HCD = \angle FCD$. Kadangi BF=CF, tai $\angle 1 = \angle 4$. Kadangi trikampio ABC $\angle 2 = 90° - \angle 1$, tai trikampio ACH $\angle 3 = 90° - \angle 2 = \angle 1 = \angle 4$. Iš lygių kampų ACD ir BCD atėmę lygius kampus ACH ir BCF, gausime lygius kampus: $\angle 5 = \angle 6$.

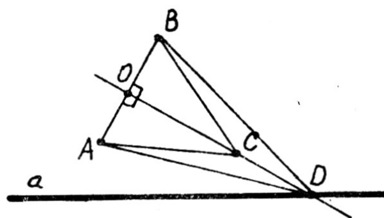
28. Tarkime, kad AH — trikampio ABC aukštinė, AM — pusiaukraštinė (BM=MC) ir $\angle BAH = \angle HAM = \angle MAC = \alpha$ (33 pav.). Trikampiai ABH ir AMH lygūs: $\triangle ABH = \triangle AMH$ (pagal statinį ir smailųjį kampą α), todėl BH=MH. Nubrėžkime trikampio AMC aukštinę MD ($MD \perp AC$). Gausime lygius stačiuosius trikampius: $\triangle AHM = \triangle ADM$ (pagal įžambinę AM ir smailųjį kampą α). Iš čia gauname: MD=MH. Kadangi BM=MC ir BH=MH, tai $MD = \frac{1}{2} MC$ ir trikampio MDC $\angle C = 30°$. Iš $\triangle AHC$ randame: $\angle H = 90°$, $\angle A = 2\alpha$, $\angle C = 90° - 2\alpha$, todėl $90° - 2\alpha = 30°$. Iš čia $\alpha = 30°$, $\angle BAC = 3\alpha = 90°$, taigi trikampis ABC — statusis.

29. Pagal uždavinio sąlygą $AA_1 \geqslant BC$ ir $BB_1 \geqslant AC$ (34 pav.). Atkarpa AA_1 arba yra stačiojo trikampio AA_1C statinis, arba sutampa su atkarpa AC, todėl $AA_1 \leqslant AC$. Iš nelygybės $AA_1 \geqslant BC$ ir $AA_1 \leqslant AC$, t. y. $BC \leqslant AA_1 \leqslant AC$, gauname $BC \leqslant AC$.

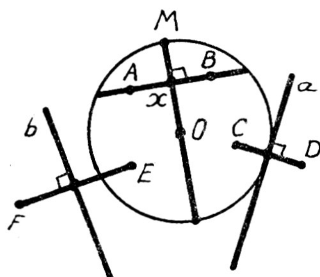
Panašiai gautume $AC \leqslant BB_1 \leqslant BC$, $AC \leqslant BC$. Iš nelygybių $BC \leqslant AC$ ir $AC \leqslant BC$ gauname: AC=BC. Todėl trikampis ABC lygiašonis. Kadangi $BC \leqslant AA_1 \leqslant AC$ ($AC \leqslant BB_1 \leqslant BC$), tai $AA_1 = AC$ ($BB_1 = BC$) ir taškas A_1 (B_1) sutampa su tašku C, trikampis ABC — statusis.

30. Analizė. Kiekvienas taškas, vienodai nutolęs nuo taškų A ir B, yra atkarpos AB vidurio statmens b taškas (atkarpos vidurio statmeniu vadinama tiesė, einanti per atkarpos vidurio tašką ir jai statmena). Vadinasi, ieškomasis taškas yra tiesių a ir b susikirtimo taškas.

Brėžimas. Sujungiame (35 pav.) taškus A ir B atkarpa AB, dalijame ją pusiau ir per tašką O išvedame $OC \perp AB$ (braižymas išaiškintas [1], 46 p.). Tiesė OC kerta tiesę a taške D, kuris ir tenkina uždavinio sąlygą.



35 pav.



36 pav.

Įrodymas. △AOD=△BOD pagal du statinius. Vadinasi, AD=BD.

Tyrimas. Kiekvienas atkarpos vidurio statmens taškas yra vienodai nutolęs nuo atkarpos galų. Jei AB⊥a ir O — atkarpos AB vidurio taškas — nėra tiesėje a, tai OC∥a ir uždavinys sprendinio neturi. Jei taškas O yra tiesėje, tai bet kuris tiesės a taškas tenkina uždavinio sąlygą. Jei taškai A ir B nėra tiesės a statmenyje, tai esant bet kokiam jų išsidėstymui atžvilgiu tiesės a (pagal sąlygą tiesė neina per tuos taškus), uždavinys turi vienintelį sprendinį.

Pastaba. Brėžimo uždavinių tyrimo rezultatai nepriklauso nuo sprendimo būdo. Ar mes sprendžiame uždavinį geometrinių taškų, lygiagretaus perkėlimo, panašumo ar algebriniu metodais — tyrimų rezultatai visada sutaps.

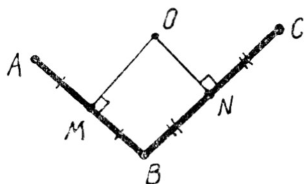
Prieinamiausias ir tinkamiausias brėžimo uždavinių tyrimo būdas — tyrinėjimas pagal patį brėžimą.

31. Analizė. Pagal tai, kas buvo pasakyta ankstesniame uždavinyje, taškai, vienodai nutolę nuo atkarpos galų, yra tiesėje, statmenoje tai atkarpai ir einančioje per tos atkarpos vidurį (joks taškas, nesantis toje tiesėje, šitos savybės neturi). Todėl uždavinio sąlygą tenkina šio statmens ir apskritimo susikirtimo taškai.

Brėžimas. Dalijame (36 pav.) atkarpą AB pusiau ir per jos vidurio tašką X išvedame MN⊥AB. Taškai M ir N vienodai nutolę nuo A ir B.

Įrodymas. △AMX=△BMX pagal du statinius, todėl MA=MB. Analogiškai įrodome, kad NA=NB.

Tyrimas. Jei atkarpos vidurio taškas yra apskritimo viduryje, uždavinys turi du sprendinius. Jei jis yra apskritime, tai uždavinys turi vieną arba du sprendinius, priklausomai nuo to, ar duota atkarpa yra tiesėje, einančioje per apskritimo centrą, ar ne. Jei atkarpos vidurio taškas yra apskritimo išorėje, tai einan-



37 pav.

tis per jį statmuo atkarpai gali turėti vieną, du arba nei vieno bendro taško su apskritimu.

Uždavinys gali turėti vieną, du arba nė vieno sprendinio.

32. Analizė. Ieškomojo apskritimo centras O turi būti vienodai nutolęs nuo taškų A, B ir C. Kadangi visi taškai, vienodai nutolę nuo taškų A ir B, yra atkarpos AB vidurio statmenyje, o visi taškai, vienodai nutolę nuo taškų B ir C,— atkarpos BC vidurio statmenyje, tai tų statmenų susikirtimo taškas ir bus ieškomo apskritimo centras.

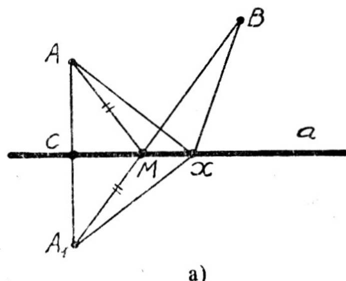
Brėžimas. Nubraižome atkarpų AB ir BC vidurio statmenis, randame jų susikirtimo tašką O (37 pav.). Brėžiame apskritimą, kurio centras O, spindulys OA. Tai ieškomasis apskritimas.

Įrodymas. Kadangi $AO=BO=CO$, tai nubrėžtasis apskritimas eina per taškus B ir C.

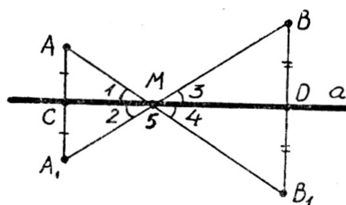
Tyrimas. Jei tarsime, kad per taškus A, B, C eina du apskritimai, tai jų centrai bus vienodai nutolę nuo tų taškų ir sutaps su atkarpų AB ir BC vidurio statmenų susikirtimo tašku O, o spinduliai bus lygūs $OA=OB=OC$, t. y. apskritimai sutaps. Vieninteliu atveju atkarpų AB ir BC vidurio statmenys gali nesikirsti (kai taškai A, B ir C yra vienoje tiesėje).

Jei trys taškai nėra vienoje tiesėje, tai per juos galima išvesti vienintelį apskritimą. Jei jie yra vienoje tiesėje, tai uždavinys sprendinio neturi.

33. Analizė. Tarkime, kad uždavinys išspręstas ir M — ieškomasis tiesės a taškas, t. y. $AM+MB<AX+XB$ (38 pav., a). Pakeiskime tašką A tokiu tašku A_1, kad $AM=A_1M$ ir taškai A_1, M, B būtų vienoje tiesėje. Pagal trikampio nelygybę $A_1B<$ $<A_1X+XB=AX+XB$.



a)



b)

38 pav.

B r ė ž i m a s. Per tašką A (arba B) išveskime tiesę, statmeną tiesei a (žr. [1], 47 p., 153 užd.). Atidėkime $CA_1=CA$ ir sujunkime taškus A_1 ir B atkarpa, kertančia tiesę a taške M. M — ieškomasis taškas.

Į r o d y m a s. Tarkime X — bet kuris tiesės a taškas, nesutampantis su tašku M. $\triangle ACM=\triangle A_1CM$ pagal du statinius. Todėl $A_1M=AM$. Vadinasi, $AM+MB=A_1M+MB=A_1B<A_1X+XB=$ $=AX+XB$ ($\triangle ACX=\triangle A_1CX$, todėl $AX=A_1X$).

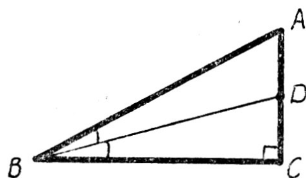
T y r i m a s. Bet kuriems dviems taškams, tenkinantiems uždavinio sąlygą, uždavinys turi sprendinį. Įrodysime, kad tai vienintelis sprendinys. Tam įrodysime, kad jei brėžti pradedant tašku B, tai gausime tą patį tašką M. Užtenka parodyti, kad taškai A, M, B_1 yra vienoje tiesėje (38 pav., b), $\angle 2=\angle 3$ pagal brėžimą; $\angle 1=\angle 2$ ir $\angle 3=\angle 4$, nes $\triangle ACM=\triangle A_1CM$ ir $\triangle BDM=$ $=\triangle B_1DM$. Taškai A_1, M, B yra vienoje tiesėje, todėl $\angle 5+\angle 4+$ $+\angle 3=180^\circ$. $\angle 5+\angle 2+\angle 1=180^\circ$ — taškai A, M, B_1 yra vienoje tiesėje.

34. A n a l i z ė. Tarkime, kad trikampis ABC — ieškomasis. Kampą ABC, lygų duotajam smailiajam kampui, mes mokame nubraižyti. Mokame padalyti jį pusiau, atidėti pusiaukampinėje BD atkarpą, lygią duotajai, išvesti per tašką D tiesę, statmeną BC.

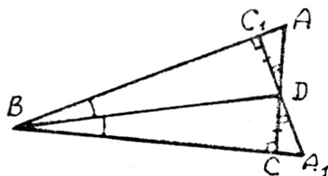
B r ė ž i m a s. Imame spindulį BC ir atidedame nuo jo kampą, lygų duotajam ([1], 43 p.) (39 pav.). Nubraižykime duotojo kampo pusiaukampinę ([1], 44 p.) ir atidėkime atkarpą BD, lygią pusiaukampinei. Per tašką D išveskime tiesę, statmeną BC ([1], 47 p., 153 prat.). Trikampis ABC — ieškomasis.

Į r o d y m a s. Kampas ir pusiaukampinė yra lygūs duotiesiems, nes taip braižėme.

T y r i m a s. Nubrėžę kampą B ir pusiaukampinę BD, išvedame $DC\perp BC$ ir $DC_1\perp BC_1$. Gausime du stačiuosius trikampius: $\triangle ABC$ ir $\triangle A_1BC_1$. Įrodysime, kad jie lygūs. $\triangle BCD=\triangle BC_1D$ pagal įžambinę ir smailųjį kampą, todėl $DC=DC_1$. Toliau, $\triangle A_1CD=$

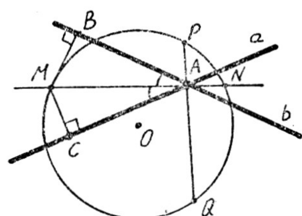


a)

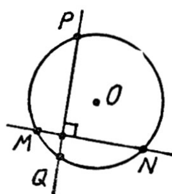


b)

39 pav.



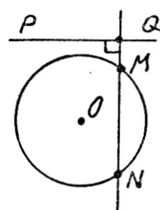
a)



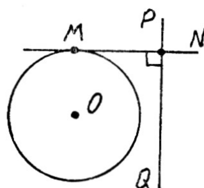
b)



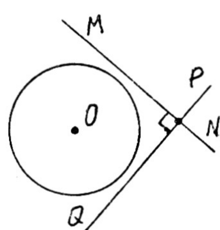
c)



d)



e)



f)

40 pav.

$=\triangle AC_1D$ pagal statinį ir smailųjį kampą. Iš čia: $\triangle ABC = \triangle A_1BC_1$. Todėl uždavinys visada turi tik vieną sprendinį.

35. A n a l i z ė. Tarkime, kad M — ieškomasis taškas ir MB=MC (40 pav., a). Tada $\triangle ABM = \triangle ACM$, todėl $\angle MAB = \angle MAC$. Taigi AM — kampo BAC pusiaukampinė.

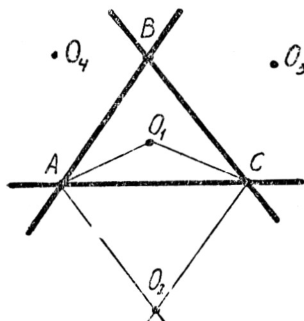
B r ė ž i m a s. Duotųjų tiesių a ir b sudarytus kampus dalijame pusiau. Pusiaukampinių apskritimo bendri taškai (40 pav., a) M, N, P, Q yra ieškomieji taškai.

Į r o d y m a s. Kaip matėme, kampo pusiaukampinės taškai yra vienodai nutolę nuo jo kraštinių. Todėl taškų braižymas tenkina uždavinio sąlygą.

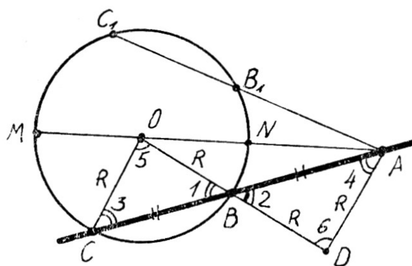
T y r i m a s. Pavaizduokime galimas pusiaukampinių MN ir PQ padėtis (40 pav., b, c, d, e, f). Uždavinys gali turėti keturis, tris, du, vieną arba nei vieno sprendinio.

36. A n a l i z ė. Taškai, vienodai nutolę nuo kampo kraštinių, kaip buvo parodyta 35 uždavinyje, yra to kampo pusiaukampinėje, todėl kampų A ir C (41 pav.) pusiaukampinių susikirtimo taškas O_1 bei jiems gretutinių kampų pusiaukampinių susikirtimo taškas O_2 yra vienodai nutolę nuo kampo kraštinių.

B r ė ž i m a s. Braižome trikampio ABC kampų ir jiems gretutinių kampų pusiaukampines (41 pav.). Kiekvienas iš gautų pusiaukampinių susikirtimo taškų O_1, O_2, O_3, O_4 vienodai nutolęs nuo duotų tiesių.



41 pav.



42 pav.

Įrodymas. Pusiaukampinės AO_1 taškai vienodai nutolę nuo tiesių AB ir AC, o pusiaukampinės CO_1 — nuo tiesių AC ir BC. Vadinasi, taškas O_1 vienodai nutolęs nuo trijų duotųjų tiesių. Tą patį galima pasakyti apie taškus O_2, O_3, O_4.

Tyrimas. Esant bet kokiam duotųjų tiesių išsidėstymui, taškų O_1, O_2, O_3, O_4 vienatinumas išeina iš to, kad atitinkamos pusiaukampinių poros susikerta tik viename taške. Jei tarsime, kad kampo ABC pusiaukampinėje yra dar vienas taškas, nesutampantis su O_1, vienodai nutolęs nuo duotųjų tiesių, tai gausime, kad tas taškas neturi būti kampų A ir C pusiaukampinėse, tačiau jos turi tik vieną bendrą tašką O_1. Vadinasi trikampio ABC viduje visada egzistuoja vienintelis taškas, vienodai nutolęs nuo kampo kraštinių.

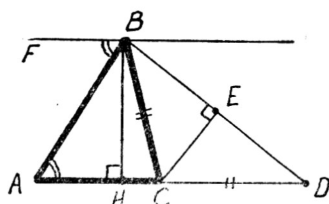
Plokštumoje yra keturi taškai, vienodai nutolę nuo trijų, paporiui besikertančių tiesių, neinančių per vieną tašką.

37. Analizė. Tarkime, kad uždavinys išspręstas (42 pav.). Spindulyje OB atidėkime atkarpai OB lygią atkarpą BD=OB. Sujunkime atkarpomis taškus D ir A, C ir O. Gausime lygius trikampius: $\triangle OCB=\triangle DAB$ pagal dvi kraštines (BD=OB nubrėžėme, AB=BC pagal pradžioje padarytą prielaidą) ir kampą tarp jų. Vadinasi, OC=DA=R. Taigi norint išspręsti uždavinį, užtenka nubraižyti trikampį AOD.

Brėžimas. Braižome trikampį AOD pagal tris kraštines: AO, OD=2R ir AD=R (žr. [1], 78 p.). Spindulio OD ir apskritimo susikirtimo tašką pažymėkime raide B. Tiesė AB yra ieškomoji.

Įrodymas. Lygiašonių trikampių COB ir ADB $\angle 3=\angle 1$ ir $\angle 2=\angle 4$. Tačiau $\angle 1=\angle 2$, todėl $\angle 5=\angle 6$. Kadangi tie trikampiai lygūs: $\triangle COB=\triangle ADB$ pagal kraštinę (OC=AD) ir du kampus prie jos, tai AB=BC.

Tyrimas. Galimybė nubraižyti tiesę AC priklauso nuo to, ar galima nubraižyti trikampį OAD. Kadangi pagal sąlygą taškas



43 pav.

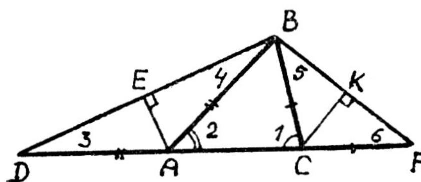
A yra apskritimo išorėje ($OA > R$), tai galima nubraižyti trikampį (uždavinys turi sprendinį), jei $OA < OD + AD = 3R$. Kai $OA = 3R$, ieškomoji tiesė bus AM, kur MN — apskritimo skersmuo. Iš brėžinio matyti, kad, kai $R < OA < 3R$, uždavinys turi du sprendinius (tiesės AC ir AC_1); kai $OA = 3R$ — vieną sprendinį; kai $OA > 3R$, uždavinys neturi sprendinių.

38. A n a l i z ė. Tarkime, kad uždavinys išspręstas ir ABC — ieškomasis trikampis (43 pav.), kurio $\angle BAC$ — duotasis kampas, BH — duotoji aukštinė ir $AB + BC + AC = P$. Galime nubraižyti trikampį ABH: žinome jo kampus ir statinį BH. Nubraižę trikampį ABH, rasime kraštinę AB. Iš trikampio perimetro atėmus kraštinės AB ilgį, likęs dydis bus lygus kraštinių AC ir CB ilgių sumai. Atidėkime nuo taško A atkarpą $AD = AC + CB$ ir nubraižykime trikampį BHD. Jei nubraižysime atkarpą $BC = CD$, tai trikampis ABC — ieškomasis.

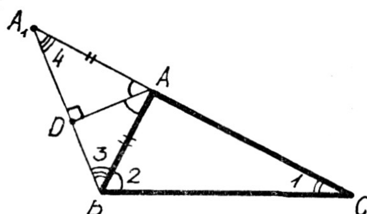
B r ė ž i m a s. Tiesei AD brėžiame lygiagrečią tiesę BF, $BF \parallel AD$, taip, kad atstumas tarp jų būtų lygus duotajam sąlygoje aukštinės ilgiui (žr. [1], 81 p., 284 užd.). Per bet kokį tašką B tiesę BF išvedame $BH \perp BF$ (žr. [1], 45 p.) ir nuo spindulio BF atidėsime kampą FBA, lygų duotojo trikampio kampui. Tuo pačiu nubraižysime kampą BAC, lygų duotojo trikampio kampui ir surasime kraštinės AB ilgį, nubraižius trikampį ABH. Sumažinkime atkarpą, lygią duotojo trikampio perimetrui, atkarpos AB ilgiu (žr. [1], 43 p.) ir atidėkime atkarpą AD, lygią šiam skirtumui. Sujunkime taškus B ir D, per atkarpos BD vidurio tašką E išveskime $EC \perp BD$ (žr. [1], 45 p.). Tašką C sujunkime su B. Trikampis ABC — ieškomasis.

Į r o d y m a s. BH ir kampas BAC lygūs duotiems aukštinei ir kampui pagal tai, kaip braižėme ($\angle FBA = \angle BAH$ kaip priešiniai kampai, kai dvi lygiagrečias tieses kerta trečia). $AD = P - AB$, $\triangle DCE = \triangle BCE$ pagal du statinius; todėl $BC = CD$ ir $AC + CB = P - AB$, t. y. $AC + CB + AB = P$. Trikampis ABC — ieškomasis.

T y r i m a s. Jeigu uždavinys turi sprendinį, tai tik vieną. Tarkime, kad trikampis $A_1B_1C_1$ tenkina uždavinio sąlygą ir $B_1H_1 = BH$, $\angle A_1 = \angle A$. Bet tada $\triangle A_1B_1H_1 = \triangle ABH$ (pagal statinį ir smailųjį kampą). Kadangi $B_1H_1 = BH$, tai, uždėjus trikampį $B_1H_1C_1$ ant trikampio BHC, taškas C_1 sutaps su tašku C (kitaip $\triangle A_1B_1C_1$ perimetras nebus lygus P). Iš to išeina, kad $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ ir uždavinys turi vienintelį sprendinį.



44 pav.



45 pav.

39. Analizė. Tarkime, kad ABC — ieškomasis trikampis (44 pav.), kuriame $\angle A$ ir $\angle C$ — duotieji kampai. Tiesėje AC atidedame atkarpas $AD=AB$ ir $CF=CB$. Sujungiame tašką B su taškais D ir F. Lygiašoniuose trikampiuose ABD ir CBF $\angle 3=\angle 4$ ir $\angle 5=\angle 6$. Pagal trikampio priekampio savybę $\angle 2=\angle 3+\angle 4$ ir $\angle 1=\angle 5+\angle 6$. Todėl $\angle 3=\frac{1}{2}\angle A$, $\angle 6=\frac{1}{2}\angle C$. Galime nubrėžti trikampį DBF: kraštinės DF ilgis lygus sąlygoje duotam trikampio ABC perimetrui, kampai D ir F lygūs pusei duotųjų kampų A ir C. Vadinasi, galime nubrėžti ir trikampį ABC.

Brėžimas. Daliname du duotuosius kampus pusiau (žr. [1], 44 p.) ir braižome trikampį DBF pagal kraštinę DF, lygią ieškomojo trikampio perimetrui, ir gautus du kampus prie jos. Dalijame BD ir BF pusiau ir išvedame vidurio statmenis $EA\perp BD$ ir $KC\perp BF$ (žr. [1], 45 p.), kurie kerta atkarpą DF atitinkamai taškuose A ir C. Trikampis ABC — ieškomasis.

Įrodymas. $\triangle DAE=\triangle BAE$ ir $\triangle FCK=\triangle BCK$ pagal du statinius. Todėl $AD=AB$, $\angle 3=\angle 4$; $CF=CB$, $\angle 5=\angle 6$. Kadangi $\angle 2=2\cdot\angle 3$, $\angle 1=2\cdot\angle 6$, tai trikampio ABC kampai A ir C lygūs duotiesiems. Be to, šio trikampio perimetras lygus $AB+AC+CB=DA+AC+CF=DF$.

Tyrimas. Uždavinys turi vienintelį sprendinį, jei duotųjų kampų suma mažesnė nei 180°, o perimetras bet koks. Jei vienas iš kampų α ir β statusis arba bukasis, tai vietoje jo galima nagrinėti kampą $90°-\beta$, kai $\alpha=90°$, ir kampą $180°-(\alpha+\beta)$, kai $\alpha>90°$.

40. Analizė. Tarkime, kad ABC — ieškomasis trikampis (45 pav.), kuriame kampų skirtumas $\angle 2-\angle 1$ lygus duotajam kampui, BC — duotoji kraštinė ir suma $AB+AC$ lygi duotajai sumai. Jei tiesėje CA atidėti atkarpą $AA_1=AB$, tai trikampyje A_1AB $\angle A_1AB=\angle 1+\angle 2$, kaip trikampio ABC priekampis, $\angle 3=90°-\angle DAB=90°-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)$. Todėl $\angle A_1BC=\angle 2+\angle 3=\angle 2+90°-\frac{1}{2}(\angle 1+\angle 2)=90°+\frac{1}{2}(\angle 2-\angle 1)$. Vadinasi, galime nubraižyti trikampį A_1BC, o po to ir trikampį ABC.

Brėžimas. Duota: kampas, lygus skirtumui $\angle 2-\angle 1$, kraštinė BC, atkarpa CA_1 lygi $BA+AC$. Bet kokioje tiesėje atidedame atkarpą BC ir braižome kampą A_1BC, lygų $90°+{}^1/_2(\angle 2-\angle 1)$. Iš taško C, kaip iš centro, skriestuvu, nustatę atstumą $BA+AC$, darome atžymą spindulyje BA_1 (kadangi $\angle A_1BC>90°$, tai tokia atžyma bus tik viena). Nubraižykime trikampį A_1BC. Daliname kraštinę A_1B pusiau ir išvedame per jos vidurį $DA\perp A_1B$. Sujungiame taškus A ir B. Trikampis ABC — ieškomasis.

Įrodymas. $\angle A_1BC=90°+{}^1/_2(\angle 2-\angle 1)$. BC ir $BA+AC$ lygūs duotiesiems. Įrodysime, kad $\angle ABC-\angle ACB=\angle 2-\angle 1$. Pažymėkime $\angle ABC=x$; $\angle ACB=y$. $\angle BAC=\angle 3+\angle 4=180°+\angle 2-$ $-\angle 1-2x$. Iš $\triangle ABC$: $y=180°-x-\angle BAC=x-\angle 2+\angle 1$. Vadinasi, $\angle ABC-\angle ACB=x-(x-\angle 2+\angle 1)=\angle 2-\angle 1$.

Tyrimas. Jei $BC\geqslant AB+AC$ arba $\angle 2-\angle 1\geqslant 180°$, tai uždavinys sprendinio neturi. Priešingu atveju uždavinys turi vienintelį sprendinį.

41. Iškilojo šešiakampio kampų suma lygi $(6-2)\cdot 180°$, todėl kiekvienas iš nagrinėjamo šešiakampio kampų lygus $(6-2)\cdot 180°:$ $:6=120°$. Jiems gretutiniai kampai lygūs $180°-120°=60°$. Vadinasi, $\angle AA_1A_6=\angle AA_6A_1=60°$ (46 pav.), todėl ir $\angle A_1AA_6=60°$. Taip pat gautume, kad $\angle B=\angle C=60°$. Iš to išeina, kad trikampis ABC lygiakraštis, taigi $AB=BC$ ir $AB=AC$. Bet $AB=f+a+b$, $BC=b+$ $+c+d$, $AC=f+e+d$, todėl $f+a+b=b+c+d$, arba $a-d=c-f$, t. y.

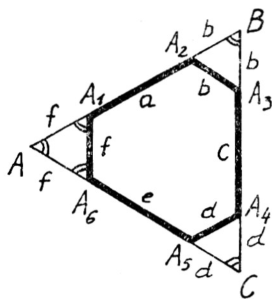
$$A_1A_2-A_4A_5=A_3A_4-A_6A_1. \quad (1)$$

Taip pat gauname: $f+a+b=f+e+d$; $a-d=e-b$, t. y.

$$A_1A_2-A_4A_5=A_5A_6-A_2A_3. \quad (2)$$

Iš (1) ir (2) gauname: $A_1A_2-A_4A_5=A_5A_6-A_2A_3=A_3A_4-A_6A_1$.

42. Kadangi $a_1-a_4=a_5-a_2$, tai $a_1+a_2=a_4+a_5$ ir $a_1+a_2+a_3=$ $=a_3+a_4+a_5$. Analogiškai iš lygybės $a_1-a_4=a_3-a_6$ gauname a_1+ $+a_6=a_3+a_4$ ir $a_5+a_6+a_1=a_3+a_4+a_5$. Vadinasi, $a_1+a_2+a_3=a_3+a_4+a_5=a_5+a_6+a_1$.



46 pav.

Nubrėšime lygiakraštį trikampį ABC (46 pav.), kurio kraštinė lygi $a_1+a_2+a_3$, ir jo kraštinėse atidėsime atkarpas $AA_1=AA_6=a_6$, $BA_2=BA_3=a_2$, $CA_4=$ $=CA_5=a_4$. Sujungsime taškus A_1 ir A_6, A_2 ir A_3, A_4 ir A_5. Kadangi trikampiai AA_1A_6, BA_2A_3, CA_4A_5 lygiakraščiai, tai iškilojo šešiakampio $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ visi kampai lygūs $120°$, $A_2A_3=a_2$, $A_4A_5=a_4$, $A_6A_1=$ $=a_6$. Šis šešiakampis tenkina 41-mo užda-

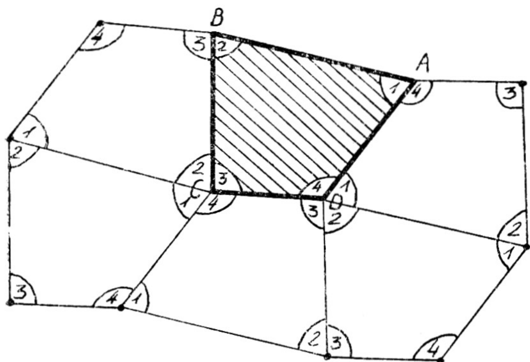
vinio sąlygą, todėl $A_1A_2-a_4=A_5A_6-a_2=A_3A_4-a_6$; $A_1A_2=a_1$, $A_5A_6=a_5$, $A_3A_4=a_3$. Šešiakampis $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ tenkina uždavinio sąlygą.

43. Kadangi ABCD — iškilusis keturkampis (47 pav.), tai $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=(4-2)\cdot 180°=360°$. Iš to gauname, kad prie kiekvienos viršūnės surinkus pilną kampų rinkinį ($\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$), neatsiras tarpų tarp iš tos viršūnės išeinančių keturkampių kraštinių. Aišku, kad prie kraštinės reikės dėti jai lygią kraštinę. Pavyzdžiui, prie subrūkšniuoto keturkampio kraštinės CD dėkime kito keturkampio kraštinę taip, kad kampas 3 būtų prie kampo 4, o kampas 4 — prie kampo 3. Prie antro keturkampio kraštinės BC dėkime trečią keturkampį taip, kad kampas 3 būtų prie kampo 2, kampas 2 — prie kampo 3. Ir t. t.

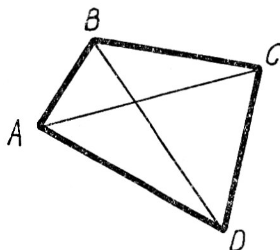
44. Sakykime, ABCD — iškilusis keturkampis (48 pav.). Taškai B ir D yra kampo BAD kraštinėse. Taškas C yra kampo BAD viduje, todėl spindulys AC irgi yra to kampo viduje. Taškai B ir D yra skirtingose pusplokštumėse, kurias nusako tiesė AC. Iš to išeina, kad atkarpa, jungianti taškus B ir D, kerta spindulį AC. Panašiai įrodytume, kad atkarpa AC kerta spindulį BD. Kadangi dvi tiesės negali kirstis daugiau kaip viename taške, tai atkarpos BD ir spindulio AC bei atkarpos AC ir spindulio BD susikirtimo taškai sutampa ir yra atkarpų AC bei BD (keturkampio įstrižainių) susikirtimo taškas.

45. Jei ABCD — iškilusis keturkampis, tai priešingas viršūnes jungiančios atkarpos AC ir BD susikerta (žr. 44 užd.). Tai reiškia, kad taškai A ir C (B ir D) yra skirtingose tiesės BD (AC) pusėse.

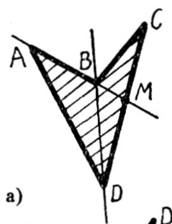
Išnagrinėkime atvejį, kai duotasis keturkampis neiškilusis. Jei tiesė AB kerta atkarpą CD, tai viršūnės C ir D yra skirtingose pusplokštumėse tiesės AB atžvilgiu, nes ABCD — neiškilusis ke-

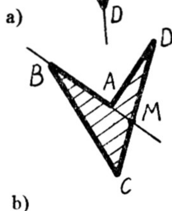


47 pav.

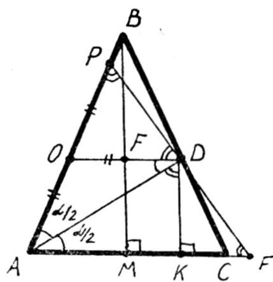


48 pav.





49 pav.



50 pav.

turkampis. Galimi taškų A, B, M išsidėstymo atvejai pavaizduoti brėžiniuose (49 pav., a, b). Pirmu atveju taškai C, M ir taškas A yra skirtingose pusplokštumėse tiesės BD atžvilgiu. Vadinasi, keturkampio viršūnės A ir C yra skirtingose tiesės, einančios per taškus B ir D, pusėse. Antru atveju viršūnės B ir D yra skirtingose tiesės AC pusėse.

46. Tiesių ED ir AB susikirtimo tašką pažymėkime raide P (50 pav.). Stačiųjų trikampių AED ir APD statinis AD bendras, smailieji kampai EAD ir PAD lygūs, todėl tie trikampiai lygūs: $\triangle AED = \triangle APD$. Vadinasi, $AP = AE$, taigi $AP = a$. Be to, $\angle AED = \angle APD$.

Per tašką D nubrėžkime tiesę, lygiagrečią tiesei AC. Jos ir tiesės AB susikirtimo tašką pažymėkime raide O. Kampai ODP ir AED yra lygiagrečiųjų tiesių OD ir AC bei jų kirstinės BC atitinkamieji kampai, todėl jie lygūs: $\angle ODP = \angle AED$. Tačiau $\angle AED = \angle APD$, todėl $\angle ODP = \angle OPD$, taigi $\triangle POD$ — lygiašonis, $OD = OP$.

Kampai ADO ir DAE yra lygiagrečiųjų tiesių OD ir AC bei jų kirstinės DA priešiniai kampai, todėl jie lygūs: $\angle ADO = \angle DAE$, todėl ir $\angle ADO = \angle OAD$. Vadinasi, $\triangle DOA$ — lygiašonis, todėl $OD = OA$.

Iš $OD = OP$ ir $OD = OA$ gauname, kad $OP = OA = {}^1/_2\ AP = {}^1/_2 a$, todėl ir $OD = {}^1/_2 a$.

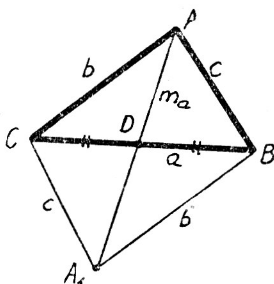
Dabar jau nesunkiai gauname, kad $MK = FD = {}^1/_2 OD$, t. y. $MK = {}^1/_4 a$.

47. Pratęskime pusiaukraštinę AD ir atidėkime $DA_1 = DA$ (51 pav.). Nubrėžkime atkarpas A_1B ir A_1C. $\triangle ADC = \triangle A_1DB$ ir $\triangle ADB = \triangle A_1DC$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų.

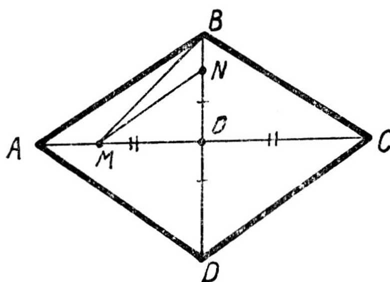
1) Iš trikampio ABA_1 : $AA_1 < AB + BA_1$; $2m_a < b + c$; $m_a < (b + c)/2$. Tą patį gauname ir pusiaukraštinėms m_b ir m_c: $m_b < (a + c)/2$; $m_c < (a + b)/2$. Sudedame šias tris nelygybes: $m_a + m_b + m_c < a + b + c = P$. (1)

2) Iš trikampių ADB ir A_1DB: $m_a + a/2 > c$ ir $m_a + a/2 > b$. Iš čia $2m_a + a > b + c$; $m_a > (b + c - a)/2$. Analogiškai ir kitoms pusiaukraštinėms: $m_b > (a + c - b)/2$; $m_c > (a + b - c)/2$. Sudedame šias tris nelygybes: $m_a + m_b + m_c > {}^1/_2(a + b + c) = {}^1/_2\ P$. (2)

Sujungiame (1) ir (2): ${}^1/_2\ P < m_a + m_b + m_c < P$.



51 pav.



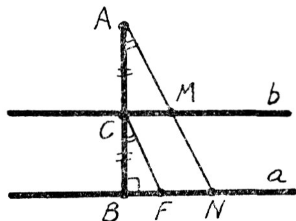
52 pav.

48. Pirmiausia įrodysime, kad tokio keturkampio įstrižainės dalija viena kitą pusiau. Tarkime, kad taip nėra. Tada atidėsime (52 pav.) ON=OD ir OM=OC. △OMN=△OCD pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Tada trikampių OMN ir OAB perimetrai lygūs. Naudojantis trikampio nelygybe, gauname: MN<NB+ +MB<NB+MA+AB. Gavome prieštarą: trikampio OAB perimetras didesnis už trikampio OMN perimetrą, o pagal mūsų teigimą jie turi būti lygūs.

Iš to išeina, kad AO=OC ir BO=OD. Tada iš trikampių AOB, BOC, COD, DOA perimetrų lygumo gauname: AB=BC=CD=DA. Vadinasi, keturi nurodyti trikampiai yra lygūs, todėl BD⊥AC, ∠A=∠C, ∠B=∠D, AB∥CD, BC∥AD. ABCD — rombas.

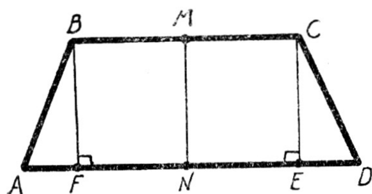
49. Per duotąjį tašką A išveskime tiesę AB, statmeną duotajai tiesei a (53 pav.). Per atkarpos AB vidurio tašką C išveskime tiesę b, lygiagrečią tiesei a: b∥a. Pasirinkime bet kurį tiesės a tašką. Pažymėkime jį raide N. Nubrėžkime atkarpą AN. Kadangi A ir N yra skirtingose pusplokštumėse tiesės b atžvilgiu, tai atkarpa AN kerta tiesę b. Susikirtimo tašką pažymėkime raide M. Nubrėžkime atkarpą CF, lygiagrečią atkarpai AN: CF∥AN. Keturkampis CMNF — lygiagretainis, todėl CF=MN. Gauname lygius trikampius: △ACM=△CBF (pagal statinį ir smailųjį kampą), todėl AM=CF. Vadinasi, AM=MN, M — atkarpos AN vidurio taškas.

Lengva įrodyti, kad bet koks tiesės b taškas yra atkarpos, jungiančios tašką A su bet kuriuo tiesės a tašku, vidurys, ir kad joks taškas, neesantis tiesėje b, šios savybės neturi.



53 pav.

Išvada: atkarpų, tenkinančių uždavinio sąlygą, vidurio taškai yra vienoje tiesėje, lygiagrečioje duotajai tiesei.



54 pav.

50. Sakykime, ABCD — lygiašonė trapecija, BM=MC, AN=ND (54 pav.). Įrodysime, kad MN⊥AD.

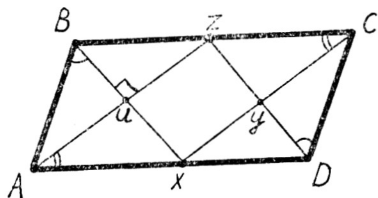
Išveskime atkarpas BF ir CE, statmenas atkarpai AD. Gauname lygius trikampius: △ABF=△DCE, todėl BF=CE, AF=DE. Tada N — atkarpos FE vidurio taškas, BCEF — stačiakampis. Taigi BMNF — stačiakampis, todėl MN⊥AD.

Atvirkštinis teiginys: jei tiesė eina per trapecijos pagrindų vidurio taškus ir yra statmena pagrindams, tai ta trapecija lygiašonė. Įrodysime. Išveskime atkarpai MN lygiagrečias atkarpas: BF∥MN ir CE∥MN. Aišku, kad FE=BC, BM=MC=NF=NE. Kadangi AN=ND, tai AF=AN−FN=DN−NE=ED, todėl △ABF= =△DCE pagal du statinius. Vadinasi, AB=CD ir trapecija lygiašonė.

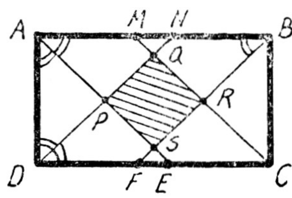
51. Pirmiausia išnagrinėsime atvejį, kai ABCD — lygiagretainis (55 pav., a). Kadangi kampų A ir B suma lygi 180°, tai tų kampų pusiaukampinės viena su kita sudaro 90° kampą. Todėl ∠BUZ=90°. ∠BCX=∠DAZ ir CX∥AZ, nes BC∥AD ir ∠A= =∠C. Analogiškai įrodome, kad DZ∥BX. Iš to išeina, kad XYZU — stačiakampis (AB≠BC, nes rombo atveju negauname keturkampio).

Sakykime ABCD — stačiakampis ir AB≠BC (55 pav., b). Pagal tai, kas buvo išnagrinėta aukščiau, PQRS — stačiakampis. Lygiašoniai statieji trikampiai DQC ir ASB, kurių įžambinės lygios, yra lygūs, todėl DQ=AS. Trikampis APD irgi lygiašonis, AP= =DP. Iš to gauname, kad DQ−DP=AS−AP, t. y. PS=PQ, todėl PQRS — kvadratas.

52. Tegul AB⊥BC ir BD⊥AC (56 pav., a). Trikampyje ABD kampas ABD papildo kampą BAD iki 90°, trikampyje ABC kampas BCD papildo tą patį kampą iki 90°. Vadinasi, ∠ABD=∠BCD. Bet tada ∠BAD=∠CBD.

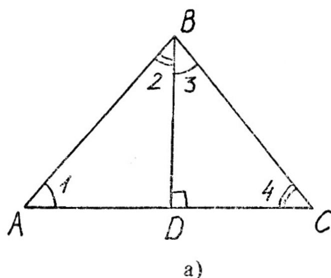


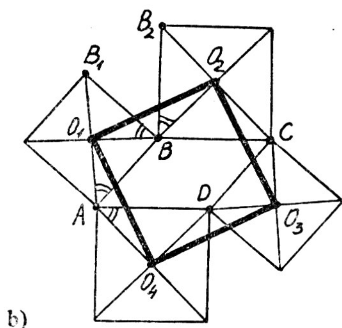
a)



b)

55 pav.

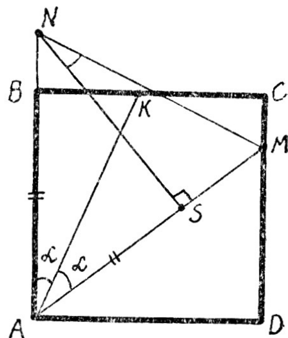




56 pav.

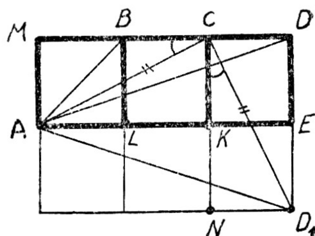
Kvadratai su centrais O_1 ir O_3, kaip ir kvadratai su centrais O_2 ir O_4, tarpusavyje lygūs (56 pav., b). Taip pat jų įstrižainių pusės yra lygios. Įrodysime, kad $\triangle AO_1O_4 = \triangle BO_1O_2 = \triangle CO_2O_3 = \triangle DO_3O_4$. Pagal tai, kas buvo įrodyta aukščiau, $\angle B_1BB_2 = \angle BAD$. $\angle O_1BB_1 = \angle B_2BO_2 = \angle O_1AB = \angle O_4AD = 45°$. Todėl $\angle O_1BO_2 = \angle O_1AO_4$. Be to, $O_1B = O_1A$ ir $O_2B = AO_4$. Dėl to $\triangle O_1AO_4 = \triangle O_1BO_2$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Analogiškai įrodome kitų nurodytų trikampių lygumą. Kadangi $\angle O_4O_1A = \angle O_2O_1B$ ir $\angle AO_1B = 90°$, tai ir $\angle O_4O_1O_2 = 90°$. Vadinasi, $O_1O_2O_3O_4$ — kvadratas.

53. Atidėkime $AN = AM$ ir sujunkime N su M (57 pav.). Iš taško N nuleiskime statmenį į tiesę AM: $NS \perp AM$. Gausime lygius trikampius: $\triangle ANS = \triangle MAD$, nes iš ankstesniojo uždavinio $\angle ANS = \angle MAD$ ir $AM = AN$. Iš čia: $AD = NS$ ir $AS = MD$. Pažymėkime $\angle BAK = \angle KAM = \alpha$. Tada $\angle ANS = 90° - 2\alpha$. Lygiašonio trikampio MAN $\angle ANM = \angle AMN = \frac{1}{2}(180° - \angle NAM) = 90° - \alpha$. Nagrinėkime trikampius ABK ir NMS. $\angle SNM = \angle ANM - \angle ANS = (90° - \alpha) - (90° - 2\alpha) = \alpha$. Kadangi dar ir $NS = AD = AB$, tai $\triangle ABK = \triangle NSM$, taigi, $SM = BK$. Iš to gauname, kad $AM = AS + SM = MD + BK$, ką ir reikėjo įrodyti.

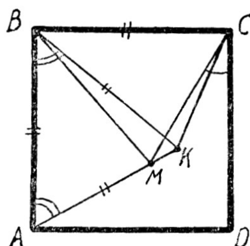


57 pav.

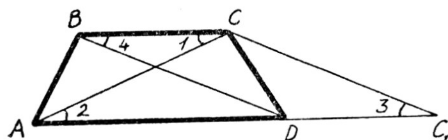
54. Suraskime tašką D_1, simetrišką taškui D taško E atžvilgiu, ir atkarpomis sujunkime jį su taškais A ir C (58 pav.). Stačiakampis AMCK lygus



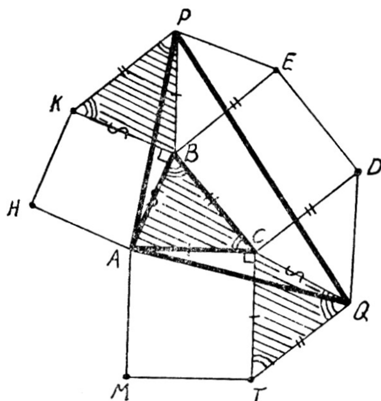
58 pav.



59 pav.



61 pav.



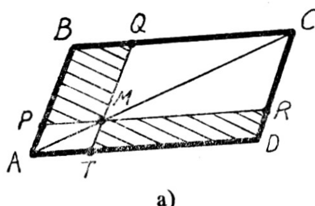
60 pav.

stačiakampiui $NCDD_1$, todėl $AC=CD_1$, $\angle MCA=\angle NCD_1$. Kadangi $\angle MCA+\angle ACN=90°$, tai ir $\angle NCD+\angle ACN=90°$, t. y. $\angle ACD_1=90°$. Vadinasi, ACD_1 — statusis lygiašonis trikampis, todėl $\angle CAD_1=45°$. Bet $\angle CAD_1=\angle CAE+\angle EAD_1=\angle CAE+\angle DAE$. Kampas BAL lygus 45°. Taigi $\angle BAE+\angle CAE+\angle DAE=45°+ +45°=90°$.

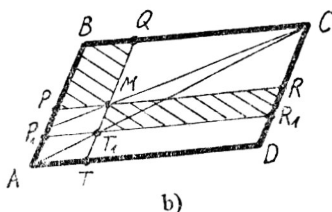
55. Atidėkime $AK=AB$ (59 pav.). Tašką K atkarpomis sujunkime su taškais B ir C. Trikampio ABK $\angle A=60°$, $BA=AK$. Vadinasi, tai lygiakraštis trikampis, $\angle ABK=60°$, $BK=AB$, $BK=BC$. Kadangi $\angle CBK=90°-\angle KBA=30°$, o trikampis BCK — lygiašonis, tai $\angle BKC=\frac{1}{2}(180°-\angle CBK)=75°$. Bet pagal sąlygą $\angle MCD=15°$. Vadinasi, CK sutampa su CM, taškai K ir M irgi sutampa ir $\angle CBM=30°$.

56. $\triangle ABC=\triangle QCT$ (60 pav.), nes $\angle BCA=\angle CTQ$ ($CT\perp AC$, $TQ\parallel CD$, $CD\perp BC$), $CT=AC$, $BC=CD=TQ$. Analogiškai: $\triangle ABC= =\triangle BKP$, nes $KB=AB$, $KP=BE=BC$, $\angle PKB=\angle ABC$. Iš šių trikampių lygybės gauname, kad $PB=AC$, $AB=CQ$, $\angle KBP=\angle TCQ$. Kadangi $\angle ABK=\angle ACT=90°$, tai $\angle ABP=\angle ACQ$ ir trikampiai ABP bei ACQ lygūs pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Vadinasi, $AP=AQ$ ir $\triangle PAQ$ — lygiašonis. $\angle PAQ=\angle PAB+\angle BAC+ +\angle CAQ=\angle PAB+\angle KBP+\angle APB$. Ši suma skiriasi nuo trikampio APB kampų sumos kampo ABK, lygaus 90°, dydžiui. Vadinasi, $\angle PAQ=90°$. Taigi APQ — statusis lygiašonis trikampis.

57. Analizė. Tarkime, kad ABCD — ieškomoji trapecija (61 pav.). Kadangi $\triangle ABC=\triangle DCB$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų), tai $AC=BD$. Išveskime $CC_1\parallel BD$. Nubrėžę atkarpą DC_1, gausime lygiašonį trikampį ACC_1, kurio $AC=CC_1$, $AC_1=AD+$



a)



b)

62 pav.

$+DC_1=AD+BC$. Nubraižę šį trikampį pagal tris kraštines, galėsime nubraižyti ir trapeciją.

Brėžimas. Braižome atkarpą AC_1, lygią trapecijos pagrindų sumai. Iš taškų A ir C_1, kaip centrų, darome atžymas spinduliu, lygiu trapecijos įstrižainei. Gauname tašką C. Per tą tašką išvedame $CB \parallel AC_1$ ir atidedame atkarpas CB ir C_1D, lygias trapecijos viršutiniam pagrindui. Taškus B ir C atkarpomis sujungiame su taškais A ir D. Keturkampis ABCD — ieškomoji trapecija.

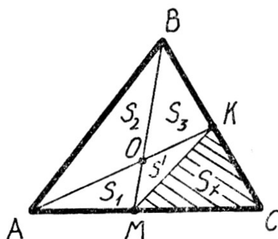
Įrodymas. Pagrindų ir įstrižainių ilgiai yra lygūs duotiesiems sąlygoje, nes taip braižėme, be to, $BC \parallel AD$. Iš čia $\angle 1 = \angle 2$. Trikampis ACC_1 lygiašonis, todėl $\angle 2 = \angle 3$. Lygiagretainio BCC_1D $\angle 4 = \angle 3$. Vadinasi, $\angle 1 = \angle 4$ ir $\triangle BCA = \triangle BCD$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Iš čia $AB=CD$. Vadinasi, ABCD — lygiašonė trapecija.

Tyrimas. Jei $AD+BC \geqslant AC+BD$, netenkinama trikampio nelygybė ir uždavinys sprendinio neturi. Jei $AD+BC < AC+BD$, tai uždavinys turi vienintelį sprendinį.

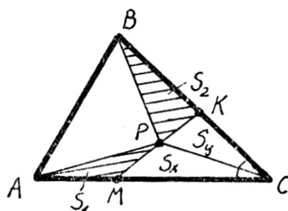
58. a) Jei trikampis turi simetrijos ašį, tai tos ašies atžvilgiu trikampio viršūnė turi pereiti į viršūnę. Simetrijos ašis turi būti statmena trikampio kraštinei, eiti per jos vidurį ir prieš ją esančią trikampio viršūnę. Iš to gauname, kad trikampis turi būti lygiašonis (šoninės kraštinės yra lygios, nes lygūs statieji trikampiai, per kurių bendrą statinį eina simetrijos ašis).

b) Kadangi iš taško galima išvesti tik vieną statmenį tiesei, tai iš viršūnės (simetrijos ašis būtinai turi eiti per viršūnę) galima išvesti tik vieną simetrijos ašį. Jei trikampis turi dar vieną simetrijos ašį, tai ji turi eiti per kitą viršūnę, ir visos trikampio kraštinės turi būti lygios, t. y. trikampis turi būti lygiakraštis. Tuo atveju trikampis turi ir trečią simetrijos ašį.

59. Sakykime, taškas M priklauso įstrižainei AC (62 pav., a). Tada $S_{PBQM}=S_{ABC}-S_{APM}-S_{MQC}$, $S_{MRDT}=S_{ACD}-S_{ATM}-S_{MRC}$. Keturkampiai ABCD, APMT ir MQCR — lygiagretainiai, todėl $S_{ACD}=S_{ABC}$, $S_{ATM}=S_{APM}$, $S_{MRC}=S_{MQC}$. Palyginę S_{PQRM} ir S_{MRDT} išraiškas, įsitikiname, kad $S_{PBQM}=S_{MRDT}$.



63 pav.



64 pav.

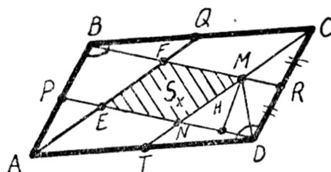
Sakykime, taškas M nėra nei vienoje įstrižainėje (62 pav., b). Per taškus C ir M išveskime tiesę. Jos ir kraštinės AB susikirtimo tašką pažymėkime P_1. Per tašką P_1 išveskime tiesę, lygiagrečią tiesei BC. Jos ir tiesių AC bei DC susikirtimo taškus pažymėkime T_1 ir R_1. Kadangi taškas M yra lygiagretainio P_1R_1CB įstrižainėje, tai $S_{PBQM}=S_{MRR_1T_1}$. Lygiagretainis MRR_1T_1 yra lygiagretainio MRDT dalis, todėl $S_{MRR_1T_1}\neq S_{MRDT}$. Tada ir $S_{PBQM}\neq S_{MRDT}$.

60. Trikampio MOK plotą pažymėkime S^1, trikampio CMK plotą — S_x (63 pav.). Trikampių, turinčių vienodas aukštines, plotų santykis lygus tų trikampių pagrindų santykiui, todėl $\frac{S_2}{S_3}=\frac{AO}{OK}$, $\frac{S_1}{S'}=\frac{AO}{OK}$. Iš čia gauname $\frac{S_1}{S'}=\frac{S_2}{S_3}$, todėl $S'=\frac{S_1\cdot S_3}{S_2}$. Taip pat gauname, kad $\frac{S_1+S_2}{S_x+S_3+S'}=\frac{AM}{MC}$, $\frac{S_1+S'}{S_x}=\frac{AM}{MC}$. Iš čia gauname $\frac{S_1+S_2}{S_x+S_3+S'}=$ $=\frac{S_1+S'}{S_x}$, arba $(S_2-S')\cdot S_x=(S_1+S^1)\cdot(S_3+S^1)$. Iš šios lygties randame S_x. Pakeitę S^1 jo išraiška gauname: $S_x=\frac{S_1\cdot S_3\cdot(S_1+S_2)\cdot(S_2+S_3)}{S_2\cdot(S_2^2-S_1\cdot S_3)}$.

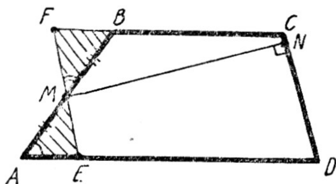
61. Pažymėkime $S_{MPC}=S_x$, $S_{PKC}=S_y$ (64 pav.). Jei dviejų trikampių aukštinės lygios, tai jų plotų santykis lygus pagrindų santykiui, todėl $S_1/S_x=AM/MC$, $S_y/S_2=KC/KB$, $S_x/S_y=MP/PK$. Kadangi pagal sąlygą $AM/MC=CK/KB=MP/PK$, tai

$$S_1/S_x=S_y/S_2=S_x/S_y \quad (1).$$

Trikampių, turinčių bendrą kampą (lygų kampą), plotų santykis lygus tą kampą sudarančių kraštinių ilgių sandaugų santykiui, todėl $\frac{S_{ABC}}{S_{MKC}}=\frac{AC\cdot BC}{MC\cdot KC}$, arba $\frac{S_{ABC}}{S_{MKC}}=\frac{AM+MC}{MC}\cdot\frac{BK+KC}{KC}=\left(\frac{AM}{MC}+1\right)\cdot$ $\cdot\left(\frac{BK}{KC}+1\right)=\left(\frac{S_x}{S_y}+1\right)\cdot\left(\frac{S_y}{S_x}+1\right)$. Iš čia $S_{ABC}=\left(\frac{S_x}{S_y}+1\right)\cdot\left(\frac{S_y}{S_x}+1\right)\cdot$ $\cdot(S_x+S_y)=\frac{(S_x+S_y)^3}{S_x\cdot S_y}$ (2). Iš (1) surasime S_x ir S_y : $S_x\cdot S_y=S_1\cdot S_2$ (3),



65 pav.



66 pav.

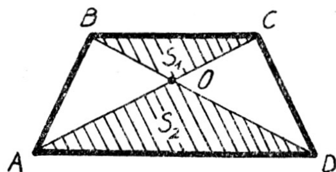
$S_y^2=S_x\cdot S_2$ (4). Iš čia $\frac{S_1\cdot S_2}{S_y}=\sqrt[3]{S_1^2\cdot S_2}$ (5). Įstatysime (3), (4) ir (5) į

$$(2):\ S_{ABC}=\frac{\left(\sqrt[3]{S_1^2\cdot S_2}+\sqrt[3]{S_1\cdot S_2^2}\right)^3}{S_1\cdot S_2}=\left(\sqrt[3]{S_1}+\sqrt[3]{S_2}\right)^3.$$

62. Kadangi $BP\parallel RD$ ir $BP=RD$, tai BRDP — lygiagretainis, taigi $BR\parallel PD$ (65 pav.). Analogiškai gauname, kad $AQ\parallel TC$. Kadangi keturkampio EFMN priešingosios kraštinės lygiagrečios, tai EFMN — lygiagretainis.

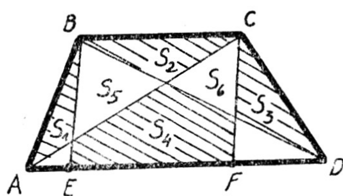
Pažymėsime $S_{ABCD}=S, S_{EFMN}=S_x$. $\triangle ABQ=\triangle CDT$ ir $\triangle DPA=\triangle BRC$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. $S_{ABQ}={}^1/_2BQ\cdot h_1={}^1/_2({}^1/_2BC\cdot h_1)={}^1/_4\ S$. Analogiškai $S_{BCR}={}^1/_4\ S$. $\triangle APE=\triangle CRN$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Vadinasi, $S_{MNDR}=S_{FQCM}$; $S_{DMR}=S_{RMC}$ $(DR=RC)$. Pagal Talio teoremą iš $AT=TD$ gauname, kad $EN=ND$. $S_{MND}={}^1/_2ND\cdot H={}^1/_2EN\cdot H={}^1/_2S_x$. $S_{DNM}=S_{DMC}=2\ S_{RMD}$ $(NM=MC)$. $S_{RMD}={}^1/_2S_{DNM}={}^1/_4S_x$; $S_{NMRD}=S_{NMD}+S_{RMD}={}^1/_2S_x+{}^1/_4S_x={}^3/_4S_x$; $S_{EFMN}=S_{ABCD}-2\ S_{BCR}-2\ S_{NMRD}$; $S_x=S-2\cdot{}^1/_4S-2\cdot{}^3/_4S_x$; $S_x={}^1/_5S$.

63. Per trapecijos ABCD šoninės kraštinės AB vidurio tašką M išveskime $EF\parallel CD$ (66 pav.). $\triangle MBF=\triangle MAE$ pagal kraštinę ir du kampus prie jos. Vadinasi, $S_{MFB}=S_{MEA}$ ir todėl trapecijos ABCD plotas lygus lygiagretainio EFCD plotui. $S_{EFCD}=CD\cdot MN$. Vadinasi, $S_{ABCD}=CD\cdot MN$, ką ir reikėjo įrodyti.

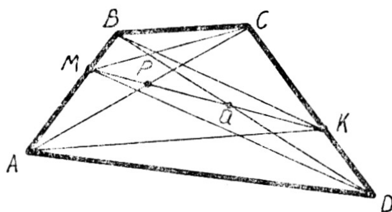


67 pav.

64. Trikampiai ABD ir ACD turi bendrą pagrindą ir lygias aukštines, todėl $S_{ABD}=S_{ACD}$ (67 pav.). Bet $S_{ABD}=S_{ABO}+S_{AOD}$ ir $S_{ACD}=S_{DCO}+S_{AOD}$, todėl $S_{ABO}=S_{DCO}$. Trikampių, turinčių vienodas aukštines, plotų santykis lygus tų trikampių pagrindų santykiui, todėl $\frac{S_{BOC}}{S_{COD}}=\frac{BO}{OD}$, $\frac{S_{ABO}}{S_{AOD}}=\frac{BO}{OD}$. Vadinasi, $\frac{S_1}{S_{COD}}=\frac{S_{ABO}}{S_2}$, $S_1\cdot S_2=$



68 pav.



69 pav.

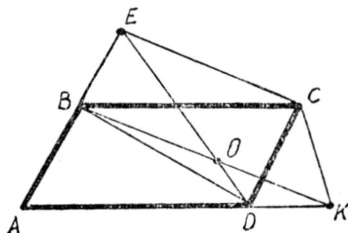
$=(S_{COD})^2$; $S_{COD}=\sqrt{S_1\cdot S_2}$. Iš to gauname, kad $S_{ABCD}=S_1+2\,S_{COD}+$ $+S_2=S_1+2\sqrt{S_1\cdot S_2}+S_2=(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$.

65. Pažymėkime trapecijos aukštinę raide H (68 pav.). Tada lygiagretainio BCFE plotas $S_{BCFE}=BC\cdot H$, $S_{ABC}={}^1/_2\,BC\cdot H$ ir $S_{BCD}={}^1/_2\,BC\cdot H$. Vadinasi, $S_{BCFE}=S_{ABC}+S_{BCD}$ (1). Antra vertus, $S_{BCFE}=S_2+S_5+S_6+S_4$; $S_{ABC}+S_{BCD}=S_1+S_5+S_2+S_3+S_2+S_6$. Atsižvelgę į (1), gauname: $S_2+S_5+S_6+S_4=S_1+S_5+S_2+S_3+S_2+S_6$. Iš čia $S_4=S_1+S_2+S_3$, ką ir reikėjo įrodyti.

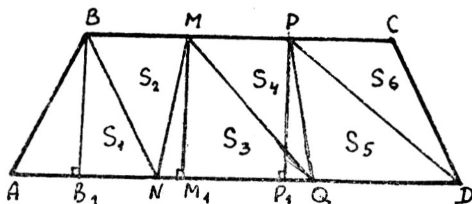
66. Trikampiai CPK ir APK (69 pav.) turi vienodus pagrindus (AP=PC) ir aukštinę, todėl $S_{CPK}=S_{APK}$ (1). Analogiškai gauname: $S_{MPC}=S_{MPA}$ (2); $S_{MDQ}=S_{MBQ}$ (3); $S_{QDK}=S_{QBK}$ (4). Kadangi $S_{MKC}=$ $=S_{MPC}+S_{PKC}$ ir $S_{MKA}=S_{MPA}+S_{PKA}$, tai, atsižvelgę į (1) ir (2), gauname: $S_{MKC}=S_{MKA}$ (5). Kadangi $S_{MKD}=S_{MDQ}+S_{QDK}$ ir $S_{MKB}=$ $=S_{MBQ}+S_{QBK}$, tai, turint omeny (3) ir (4), $S_{MKD}=S_{MKB}$ (6). Kadangi $S_{MCD}=S_{MKC}+S_{MKD}$, $S_{KAB}=S_{MKA}+S_{MKB}$, tai, remdamiesi (5) ir (6), gauname: $S_{MCD}=S_{KAB}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

67. Kadangi ABCD — lygiagretainis (70 pav.), tai $S_{ABD}=S_{BCD}$. Trikampiai BCD ir ECD turi bendrą pagrindą CD ir lygias aukštines. Todėl $S_{BCD}=S_{ECD}$. Vadinasi, $S_{ABD}=S_{ECD}$. Trikampių BDK ir CDK pagrindas DK bendras, o aukštinės lygios, todėl $S_{BDK}=S_{CDK}$. Kadangi $S_{ABOD}=S_{ABD}+S_{BKD}-S_{DOK}$ ir $S_{CEOK}=S_{ECD}+S_{CDK}-S_{DOK}$, tai $S_{ABOD}=S_{CEOK}$.

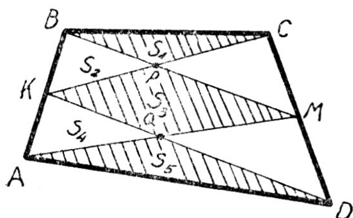
68. Nagrinėkime keturkampį ABCD (71 pav.). Sakykime, AN= =NQ=QD; BM=MP=PC. Keturkampius ABMN, NMPQ, QPCD



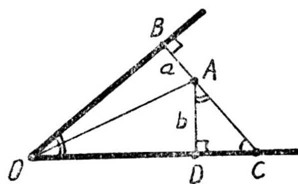
70 pav.



71 pav.



72 pav.



73 pav.

įstrižainėmis BN, MQ, PD padalykime į trikampius. Tų trikampių plotus pažymėkime S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6. Trikampių ABN, NMQ ir QPD aukštines BB_1, MM_1 ir PP_1. Iš čia gauname: $S_3 = {}^1/_2\, S_1 + {}^1/_2\, S_5$ (1). Panašiai, išnagrinėję trikampius BNM, MQP, PDC, gautume: $S_4 = {}^1/_2\, S_2 + {}^1/_2\, S_6$ (2).

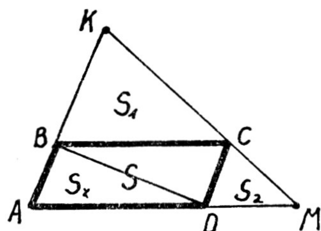
Sudėję (1) ir (2) lygybes, gauname: $S_3 + S_4 = {}^1/_2\, S_1 + {}^1/_2\, S_2 + {}^1/_2\, S_5 + {}^1/_2\, S_6$. Prie abiejų šios lygybės pusių pridėję ${}^1/_2\, S_3 + {}^1/_2\, S_4$, gauname: ${}^3/_2(S_3 + S_4) = {}^1/_2\,(S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$. Iš čia $S_{NMPQ} = {}^1/_3\, S_{ABCD}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

69. Nagrinėkime keturkampį ABCD (72 pav.). Trikampių BCK, MBA ir KDA pagrindais laikykime atkarpas BK, BA, KA. Jų aukštines pažymėkime h_1, h_2 ir h_3. Pažymėję BK=m, turime BA=2m, KA=m.

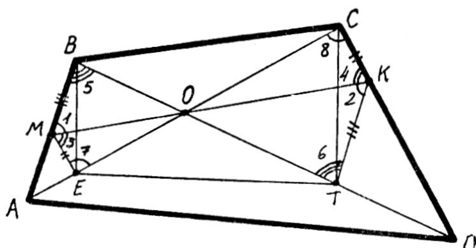
Kadangi BK=KA, tai (žr. 68 uždavinį) $h_2 = {}^1/_2\,(h_1 + h_3)$. Trikampio BMA plotas $S_{AMB} = {}^1/_2 \cdot 2a \cdot h_2$. Vietoj h_2 įrašę jo išraišką, gauname: $S_{AMB} = {}^1/_2\, ah_1 + {}^1/_2\, ah_3$. Tačiau ${}^1/_2\, ah_1$ ir ${}^1/_2\, ah_3$ yra trikampių BCK ir KDA plotai. Taigi, $S_{ABM} = S_{BCK} + S_{KDA}$. Tačiau $S_{ABM} = S_2 + S_3 + S_4$, $S_{BCK} = S_1 + S_2$, $S_{KDA} = S_4 + S_5$, todėl $S_2 + S_3 + S_4 = S_1 + S_2 + S_4 + S_5$. Iš čia randame: $S_3 = S_1 + S_5$, t. y. $S_{KPMQ} = S_{BCP} + S_{ADQ}$.

70. Nagrinėkime kampą BOC ir jo vidaus tašką A (73 pav.). Statmenų, nuleistų iš taško A į kampo kraštines, ilgiai lygūs a ir b (AB=a, AD=b). Kadangi $\angle BOC = 60°$, tai $\angle ACD = 30°$. Iš to gauname, kad $AC = 2AD = 2b$, o tada $BC = a + 2b$. Iš trikampio ADC pagal Pitagoro teoremą randame: $DC = b\sqrt{3}$. Pažymėkime $OD = y$. Tada $OC = y + b\sqrt{3}$. Kadangi $OC = 2\,OB$, tai $OB = {}^1/_2\,(y + b\sqrt{3})$. Iš trikampio OBC pagal Pitagoro teoremą gauname: $(y + b\sqrt{3})^2 - {}^1/_4 \cdot (y + b\sqrt{3})^2 = (a + 2b)^2$. Iš čia randame: $(y + b\sqrt{3})^2 \cdot (1 - {}^1/_4) = (a + 2b)^2$; $y + b\sqrt{3} = 2/\sqrt{3}\,(a + 2b)$. Vadinasi, $OB = 1/\sqrt{3}\,(a + 2b)$.

Iš trikampio OBA gauname: $OA^2 = {}^1/_3\,(a + 2b)^2 + a^2$. Iš čia randame $OA = 2\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}$.



74 pav.



75 pav.

71. Sąlygoje duota (74 pav.): $S_{KBC}=S_1$, $S_{CDM}=S_2$. Dar pažymėkime: $S_{ABCD}=S$, $S_{ABD}=S_x$. Kadangi trikampių, turinčių lygų kampą, plotų santykis lygus kraštinių, sudarančių tą kampą, ilgių sandaugų santykiui, tai

$$\frac{S_x}{S_1}=\frac{AB\cdot AD}{BC\cdot BK};\ \frac{S_2}{S_x}=\frac{DM\cdot DC}{AB\cdot AD};\ \frac{S_{AKM}}{S_{KBC}}=\frac{(AB+BK)(AD+DM)}{BC\cdot BK};$$

$$\frac{S+S_1+S_2}{S_1}=\frac{AB\cdot AD+AD\cdot BK+AB\cdot DM+BK\cdot DM}{BC\cdot BK};$$

$$\frac{S}{S_1}+1+\frac{S_2}{S_1}=1+\frac{S_2}{S_1}+\frac{AB\cdot AD}{BC\cdot BK}+\frac{BK\cdot DM}{BC\cdot BK};$$

$$\frac{S}{S_1}=\frac{S_x}{S_1}+\frac{DM}{AD}\cdot\frac{CD}{AB}\text{, kadangi } CD=AB,\ BC=AD;$$

$$\frac{S}{S_1}=\frac{S_x}{S_1}+\frac{S_2}{S_x};\qquad \frac{S}{S_1}=\frac{S_x^2+S_1\cdot S_2}{S_1\cdot S_x};$$

$S\cdot S_x=S_x^2+S_1\cdot S_2$; $S_x=\frac{1}{2}S$;

$S\cdot\frac{1}{2}S=\left(\frac{1}{2}S\right)^2+S_1\cdot S_2$; $\frac{1}{4}S^2=S_1\cdot S_2$; $S=2\sqrt{S_1\cdot S_2}$.

72. Naudosime trikampių, turinčių lygius kampus, plotų sąryšius. Kampai 1 ir 2 (75 pav.) lygūs, todėl $\frac{S_{MBO}}{S_{KTO}}=\frac{MB\cdot MO}{KT\cdot KO}$ (1).

Kampai 3 ir 4 lygūs, todėl $\frac{S_{MEO}}{S_{KCO}}=\frac{ME\cdot MO}{CK\cdot KO}$ (2).

(1) daliname iš (2):

$\frac{S_{MBO}\cdot S_{KCO}}{S_{KTO}\cdot S_{MEO}}=\frac{MB\cdot CK}{KT\cdot ME}$ (3). Kampas 5 lygus kampui 6 ir kampas 7 lygus kampui 8, todėl $\frac{S_{MBO}}{S_{KTO}}=\frac{MB\cdot BO}{KT\cdot TO}$ (4); $\frac{S_{KCO}}{S_{MEO}}=\frac{CK\cdot CO}{ME\cdot EO}$ (5).

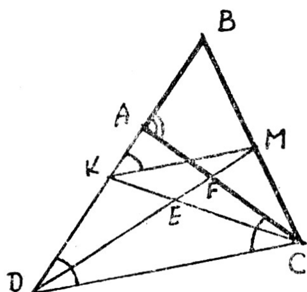
Į (3) įstatysime (4) ir (5): $\frac{MB\cdot BO\cdot CK\cdot CO}{KT\cdot TO\cdot ME\cdot EO}=\frac{MB\cdot CK}{KT\cdot ME}$; $\frac{BO\cdot CO}{TO\cdot EO}=1$. $\angle BOC=\angle TOE$, todėl $\frac{S_{BOC}}{S_{TOE}}=\frac{BO\cdot CO}{TO\cdot EO}$. Vadinasi, $S_{BOC}=S_{TOE}$ ir todėl $S_{BCT}=S_{ECT}$. Kadangi šie trikampiai turi bendrą pagrindą, tai jų aukštinės, išvestos į tą pagrindą, lygios. Vadinasi, $BE \parallel CT$.

Kai $AB \parallel CD$, teiginys akivaizdus.

Pastaba. Išdėsčius temą „Panašūs trikampiai" galima pasiūlyti tokį šio uždavinio sprendimą:

Kadangi $BM \parallel KT$, tai $\triangle MBO \sim \triangle KTO$ ir todėl $\frac{MO}{KO}=\frac{MB}{KT}$ (1). $\triangle EMO \sim \triangle CKO$ ir todėl $\frac{MO}{KO}=\frac{ME}{CK}$ (2), nes $ME \parallel CK$. $\angle BME = \angle CKT$ ($BM \parallel KT$, $ME \parallel CK$), todėl iš (1) ir (2): $\triangle MBE \sim \triangle KTC$. Iš čia $\angle MBE=\angle KTC$. Kadangi $\angle MBO=\angle KTO$ ($MB \parallel KT$), tai $\angle OBE=\angle OTC$ ($\angle OBE=\angle OBM-\angle MBE$, $\angle OTC=\angle OTK-\angle KTC$) ir iš to gauname, kad $BE \parallel CT$.

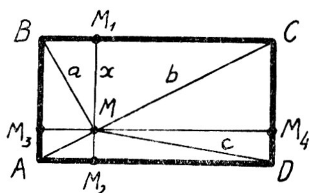
73. Kadangi $S_{BDM}=S_{BCK}$, tai $S_{BKEM}+S_{KDE}=S_{BKEM}+S_{EMC}$ (76 pav.). Iš čia $S_{KDE}=S_{EMC}$ ir taip pat $S_{DKC}=S_{DMC}$. Kadangi šių trikampių pagrindai (DC) vienodi, tai jų aukštinės turi būti vienodos ir todėl taškai K ir M yra vienodai nutolę nuo DC. Iš to gauname, kad $KM \parallel DC$ (žr. [1], 76 psl.). Todėl $\angle BKM=\angle ADC$. $\angle ADC=\angle ACD$, kaip lygiašonio trikampio kampai, ir $\angle BAC=\angle ADC+\angle ACD$, kaip trikampio ADC priekampis. Vadinasi, $\angle ADC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\alpha$ ir $\angle BKM=\frac{1}{2}\alpha$.



76 pav.

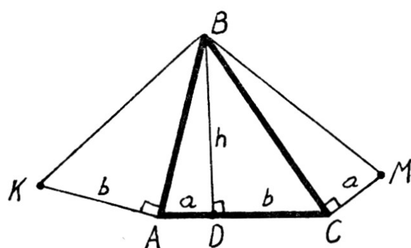
Pastaba. Akivaizdu, kad uždavinio sąlyga patenkinta, kai taškas K sutampa su tašku D, o taškas M — su tašku C.

Jei tiesė KM nelygiagretė tiesei DC, tai $S_{DCM} \neq S_{DCK}$, pavyzdžiui, $S_{DCM} < S_{DCK}$. Tada $S_{BDC}-S_{DCM} > S_{BDC}-S_{DCK}$, t. y. $S_{BDM} > S_{BCK}$.



77 pav.

74. Per tašką M išveskime dvi tieses: $M_1M_2 \parallel AB$ ir $M_3M_4 \parallel BC$ (77 pav.). Pažymėkime $MM_1=x$. Iš trikampio MBM_1 pagal Pitagoro teoremą: $BM_1^2=a^2-x^2$; $M_3M=BM_1$. Iš trikampio M_1MC : $M_1C^2=b^2-x^2$; $MM_4=M_1C$. Iš trikampio MM_4D : $M_4D^2=c^2-b^2+x^2$;



78 pav.

$MM_2 = M_4D$. Iš trikampio AMM_2: $AM^2 = a^2 - x^2 + c^2 - b^2 + x^2$; $AM = \sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

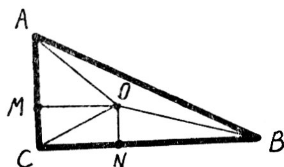
75. Pažymėsime $AD = CM = a$, $DC = AK = b$, $BD = h$ (78 pav.). Iš $\triangle ADB$ pagal Pitagoro teoremą: $AB^2 = a^2 + h^2$; iš trikampio AKB: $BK^2 = a^2 + h^2 + b^2$ (1). Iš $\triangle BDC$: $BC^2 = h^2 + b^2$; iš $\triangle BCM$: $BM^2 = a^2 + h^2 + b^2$ (2). Iš (1) ir (2): $BK = BM$.

76. $S_{AOC} = {}^1/_2\, AC \cdot OM$; $S_{BOC} = {}^1/_2\, BC \cdot ON$; $S_{ABC} = {}^1/_2\, AC \cdot BC$ (79 pav.). Kadangi $S_{BOC} = {}^1/_3\, S_{ABC}$, tai $ON = {}^1/_3\, AC$; $S_{AOC} = {}^1/_3\, S_{ABC}$; $OM = {}^1/_3\, BC$. Pagal Pitagoro teoremą $AO^2 = AM^2 + MO^2 = (AC - ON)^2 + OC^2 - MC^2 = (AC - {}^1/_3 AC)^2 + OC^2 - ON^2 = {}^4/_9\, AC^2 + OC^2 - (BO^2 - (BC - {}^1/_3\, BC)^2) = {}^4/_9\, AC^2 + OC^2 - OB^2 + {}^4/_9\, BC^2$; $OA^2 + OB^2 = {}^4/_9\, AC^2 + OC^2 + {}^4/_9\, BC^2 = {}^4/_9\, (3\, NO)^2 + OC^2 + {}^4/_9\, (3\, MO)^2 = 4(NO^2 + MO^2) + OC^2 = 4\, OC^2 + OC^2 = 5\, OC^2$.

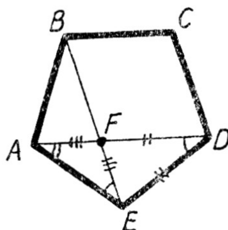
77. a) $\triangle ABE = \triangle AED$ pagal dvi kraštines ($AB = AE = ED$) ir kampą tarp jų ($\angle BAE = \angle AED$) (80 pav.). Vadinasi, $\angle BEA = \angle ADE$ ir $\triangle AED$ panašus į $\triangle AFE$ pagal pirmąjį trikampių panašumo požymį,

b) $\triangle BAE = \triangle DAE$ ir šie trikampiai lygiašoniai. Iš čia $\angle DAE = \angle AEB = \angle ADE$, $AF = FE$. $\angle DFE = 2\alpha$, kaip trikampio AFE priekampis. $\angle AFE = 180° - 2\alpha$; $\angle FED = 180° - (2\alpha + \alpha) = 180° - 3\alpha$. $\angle AED = \angle AEF + \angle FED = 180° - 2\alpha$. Pagal iškilojo n-kampio kampų sumos formulę (žr. [1], 92 p.) $\angle AED = \frac{180° \cdot 3}{5} = 108°$. Vadinasi, $108° = 180° - 2\alpha$; $\alpha = 36°$; $\angle DFE = 2\alpha = 72°$; $\angle FED = 180° - 3\alpha = 72°$. Todėl $DF = DE$. Anksčiau įrodyta, kad $\triangle ADE \sim \triangle AEF$. Todėl $\frac{DA}{DE} = \frac{AE}{EF}$. Be to, $DE = EA = DF$; $AF = EF$. Vadinasi, $\frac{DA}{DF} = \frac{DF}{AF}$.

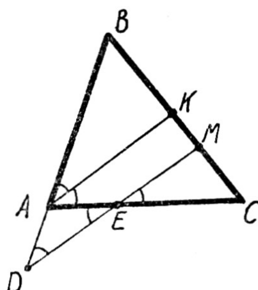
78. Nagrinėkime trikampį ABC (81 pav.). Jo kraštinės BC vidurio taškas M ($BM = CM$), pusiaukampinė AK ($\angle BAK = \angle KAC$), $MD \parallel AK$.



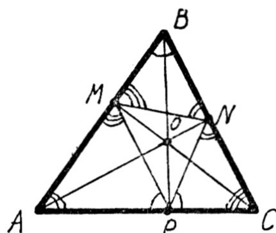
79 pav.



80 pav.



81 pav.



82 pav.

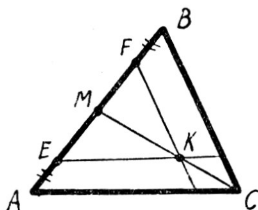
Tarkime, kad AC>AB. Tada pagal pusiaukampinės savybę KC>KB (žr. [1], 535 užd.), ir todėl KC>$^1/_2$BC, t. y. taškas M yra tarp K ir C. Pagal uždavinį 556 [1]: kampo C atžvilgiu: $\frac{MC}{KM}=\frac{EC}{AE}$ (1); kampo B atžvilgiu: $\frac{BK}{KM}=\frac{BA}{AD}$. Prie šios lygybės abiejų pusių pridėsime po 1: $\frac{BK+KM}{KM}=\frac{BA+AD}{AD}$; $\frac{BM}{KM}=\frac{BD}{AD}$; $\frac{MC}{KM}=\frac{BD}{AD}$ (2). Iš (1) ir (2): $\frac{EC}{AE}=\frac{BD}{AD}$ (3). Jei $\angle KAC=\alpha$, tai $\angle MEC=\angle AED=\alpha$; $\angle DAE=180°-2\alpha$, todėl $\angle ADE=\alpha$ ir AD=AE. Tada iš (3): BD=CE.

79. Atkarpos AN, BP, CM — trikampio ABC aukštinės (82 pav.). Jų pagrindus N, P, M sujungę atkarpomis, gauname trikampį NPM. Taigi reikia įrodyti, kad atkarpos AN, BP, CM yra trikampio NPM pusiaukampinės.

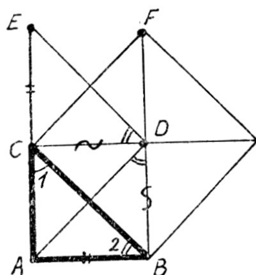
Statieji trikampiai BMC ir BNA panašūs, nes jie turi po lygų smailųjį kampą (tai jų bendras kampas ABC). Iš tų trikampių panašumo gauname:

$$\frac{MB}{BC}=\frac{NB}{AB}.$$

Gautą lygybę galima aiškinti ir šitaip: trikampio MNB dvi kraštinės (MB ir NB) proporcingos trikampio CAB dviem kraštinėms (BA ir BC). Kadangi lygūs ir kampai tarp tų kraštinių (tai jų bendras kampas ABC), tai trikampiai panašūs: $\triangle MNB \sim \triangle CAB$. Panašiųjų trikampių atitinkami kampai lygūs, todėl $\angle MNB=\angle CAB$, $\angle NMB=\angle ACB$. Panašiai gautume: $\angle PNC=\angle BAC$, $\angle NPC=\angle ABC$; $\angle MPA=\angle ABC$, $\angle PMA=\angle ACB$. Nagrinėkime trikampio NPM kampą MNP. $\angle ANM=\angle ANB-\angle MNB=90°-\angle CAB$, $\angle ANP=\angle ANC-\angle PNC=90°-\angle BAC$.



83 pav.



84 pav.

Iš čia turime $\angle ANM = \angle ANP$, todėl AN yra kampo MNP pusiaukampinė.

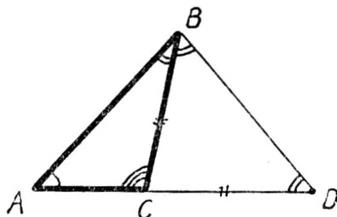
Panašiai įsitikintume, kad BP yra kampo MPN pusiaukampinė, o CM — kampo PMN pusiaukampinė.

80. Kadangi $FK \| BC$ ir $EK \| AC$ (83 pav.), tai $\triangle MFK \sim \triangle MBC$ ir $\triangle MEK \sim \triangle MAC$ pagal pirmąjį trikampių panašumo požymį. Iš čia $\frac{MB}{MF} = \frac{MC}{MK}$ ir $\frac{MC}{MK} = \frac{MA}{ME}$. Vadinasi, $\frac{MB}{MF} = \frac{MA}{ME}$ ir kadangi $MB = MF + BF$; $MA = ME + AE$, tai $\frac{MF+BF}{MF} = \frac{ME+AE}{ME}$; $\frac{BF}{MF} = \frac{AE}{ME}$; $\frac{BF}{AE} = \frac{MF}{ME}$. Be to, $BF = AE$, todėl $MF = ME$ ir $MB = MA$. Iš to gauname, kad CM — trikampio ABC pusiaukraštinė.

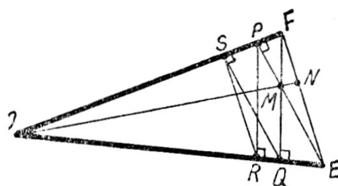
81. Spindulyje AC atidėkime $CE = AB$ ir sujunkime atkarpa taškus E ir D (84 pav.). Trikampio ABC $\angle 1 + \angle 2 = 90°$. Kadangi $\angle ECF + \angle FCB + \angle ACB = 180°$ ir $\angle FCB = 90°$, tai $\angle ECF + \angle 1 = 90°$. Vadinasi, $\angle ECF = \angle 2$, $\angle ECD = \angle ECF + \angle FCD = \angle 2 + 45°$. Bet ir $\angle DBA = \angle 2 + 45°$. Vadinasi, $\angle DBA = \angle ECD$. $\triangle ECD = \triangle ABD$ pagal dvi kraštines ($AC = AB$, $CD = BD$) ir kampą tarp jų. Todėl $ED = AD$, $\angle EDC = \angle BDA$. Kadangi $\angle CDA + \angle ADB = 90°$, tai ir $\angle EDA = \angle EDC + \angle CDA = 90°$. Pagal sąlygą $CA + AB = a$, todėl $AE = a$. Iš trikampio ADE pagal Pitagoro teoremą: $ED^2 + AD^2 = AE^2$; $2\,AD^2 = a^2$; $AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

82. Iš $\angle A = \frac{180°}{7}$, $\angle B = \frac{2 \cdot 180°}{7}$, $\angle C = \frac{4 \cdot 180°}{7}$ gauname: $\angle B = 2 \cdot \angle A$; $\angle C = 2 \cdot \angle B$.

Kraštinės AC tęsinyje atidėkime $CD = CB$ (85 pav.). Atkarpa sujungę taškus B ir D, gauname lygiašonį trikampį BCD, todėl $\angle CBD = \angle CDB$. Pagal trikampio priekampio savybę $\angle ACB = \angle CBD + \angle CDB$. Vadinasi, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle ABC$. Todėl $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ ir $\frac{AB}{AC} = \frac{AC+CD}{AB}$; $\frac{1}{AC} = \frac{AC+CD}{AB^2}$ (1); $AB^2 =$



85 pav.



86 pav.

$=AC(AC+CD)$; $AB^2=AC\,(AC+BC)$ (2). Analogiškai, įskaitant, kad $\angle ABC=2\cdot\angle BAC$, gauname: $AC^2=BC\,(AB+BC)$ (3). Sudėkime (2) ir (3): $AB^2+AC^2=AC^2+AC\cdot BC+BC\cdot AB+BC^2$; $AB^2=$ $=BC\,(AC+AB+BC)$. Iš čia, įskaitant (1), gauname: $\frac{1}{BC}=$ $=\frac{AC+AB+BC}{AB^2}=\frac{AB+(AC+BC)}{AB^2}=\frac{1}{AB}+\frac{AC+BC}{AB^2}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$;

$\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$.

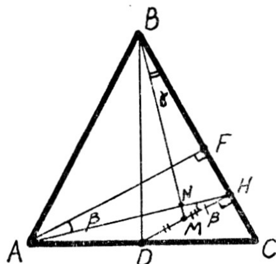
Pastaba. Rekomenduojama grįžti prie šio uždavinio sprendimo, išdėsčius trigonometrines sudėties teoremas.

$\frac{\angle B+\angle C}{2}=\frac{3\cdot 180^\circ}{7}$; $\frac{\angle C-\angle B}{2}=\angle A$; $\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}=\frac{BC\cdot AC+BC\cdot AB}{AB\cdot AC}=$

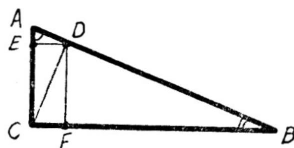
$$=\frac{\frac{2S_\triangle}{\sin C}+\frac{2S_\triangle}{\sin B}}{\frac{2S_\triangle}{\sin A}}=\frac{\sin A\ (\sin B+\sin C)}{\sin B\ \sin C}=\frac{\sin A\cdot 2\sin\frac{3\cdot 180^\circ}{7}\cdot\cos A}{\sin B\ \sin C}.$$

Kadangi $2\sin A\cos A=\sin 2A=\sin B$ ir $\sin\frac{3\cdot 180^\circ}{7}=\sin\,(180^\circ-C)$, tai $\frac{BC}{AB}+\frac{BC}{AC}=\frac{\sin(180^\circ-C)}{\sin C}=1$. Iš čia $\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{BC}$.

83. $\triangle OPR\sim\triangle OFQ$, nes jie statieji ir turi bendrą kampą O, todėl $\frac{OR}{OQ}=\frac{OP}{OF}$ (86 pav.). Iš čia $OR=\frac{OP\cdot OQ}{OF}$ (1). $\triangle OQS\sim$ $\sim\triangle OEP$ dėl tų pačių priežasčių kaip ir aukščiau. Todėl $\frac{OQ}{OE}=\frac{OS}{OP}$. Iš čia $OE=\frac{OQ\cdot OP}{OS}$ (2). Iš (1) ir (2): $\frac{OR}{OE}=\frac{OS}{OF}$. Atsižvelgiant į tai ir kad trikampiai OEF ir ORS turi bendrą kampą O, gauname: $\triangle OEF\sim\triangle ORS$. Iš to išplaukia, kad $RS\parallel EF$. Pasinaudokime tuo, kas pasakyta [1] apie trikampio aukštinių savybę (33 p.): kadangi trikampio OEF aukštinės FQ ir EP kertasi taške M, tai ON — trečia to trikampio aukštinė, $ON\perp EF$. Vadinasi ir $RS\perp OM$.



87 pav.



88 pav.

84. Išveskime $AF \parallel DH$ (87 pav.). DH — trikampio AFC vidurinė linija. $\triangle AFC \sim \triangle BDH$, nes jie abu yra statieji ir jei $\angle DBC = \alpha$, tai $\angle BCD = 90° - \alpha$, o $\angle FAC = \alpha$. Todėl

$$\frac{DH}{BH} = \frac{FC}{AF} \text{ arba } \frac{DH}{2BH} = \frac{FC}{2AF} \quad (1).$$

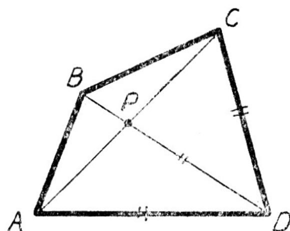
Jei $\angle DHA = \beta$, tai dėl to, kad $AF \parallel DH$, $\angle FAH = \beta$. Jei pažymėsime $\angle MBH = \gamma$, tai iš $\triangle MBH$: $\operatorname{tg}\gamma = \frac{MH}{BH} = \frac{DH}{2BH}$ (2). Iš trikampio FAH: $\operatorname{tg}\beta = \frac{FH}{AF} = \frac{FC}{2AF}$ (3). Iš (1)—(3) : $\beta = \gamma$. Tada trikampyje BNH: $\angle BHN = \angle BHD - \angle DHA = 90° - \beta$; $\angle NBH = \beta$; $\angle BHN + \angle NBH = 90° - \beta + \beta = 90°$. Vadinasi, $\angle BNH = 90°$, t. y. $BM \perp AH$.

85. a) Akivaizdu, kad $\triangle ADC \sim \triangle AED$ ir $\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$ (88 pav.); $AE = \frac{AD^2}{AC}$ (1). $\triangle BCD \sim \triangle BFD$, todėl $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BF}$; $BF = \frac{DB^2}{BC}$ (2). $\triangle ADC \sim \triangle CDB$, todėl $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$; $AD \cdot DB = CD^2$ (3). Kadangi $AB \cdot CD = 2 \cdot S_{ABC}$ ir $AB \cdot BC = 2S_{ABC}$, tai $AB \cdot CD = AC \cdot BC$; $CD = \frac{AC \cdot BC}{AB}$ (4). Iš (1) — (4) : $AE \cdot BF \cdot AB = \frac{AD^2}{AC} \cdot \frac{DB^2}{BC} \cdot AB = \frac{(AD \cdot DB)^2}{\frac{AC \cdot BC}{AB}} = \frac{CD^4}{CD} = CD^3$.

b) Iš trikampio AED: $AE^2 = AD^2 - DE^2$; iš trikampio DBF: $BF^2 = BD^2 - DF^2$. Tada $AE^2 + BF^2 + 3\,CD^2 = AD^2 - DE^2 + BD^2 - DF^2 + 3\,CD^2 = (AD^2 + CD^2) + (BD^2 + CD^2) + (CD^2 - (DE^2 + DF^2)) = AC^2 + BC^2 = AB^2$.

c) Pakelkime norimą įrodyti lygybę kubu, pasinaudodami formule: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$. $AE^2 + BF^2 + 3\sqrt[3]{AE^2 \cdot BF^2 \cdot AB^2} = AB^2$. Iš čia: $3\sqrt[3]{AE^2 \cdot BF^2 \cdot AB^2} = AB^2 - AE^2 - BF^2$ (1). Pagal tai,

kas buvo įrodyta b) dalyje: $AB^2-AE^2-BF^2=3CD^2$ (2). Įstatykime (2) į (1): $3\sqrt[3]{AE^2\cdot BF^2\cdot AB^2}=3CD^2$. a) dalyje buvo įrodyta, kad $AB\cdot AE\cdot BF=CD^3$, todėl $\sqrt[3]{(CD^2)^3}=CD^2$; $CD^2=CD^2$. Pakartoję šiuos veiksmus atvirkštine tvarka, gausime norimą įrodyti lygybę.

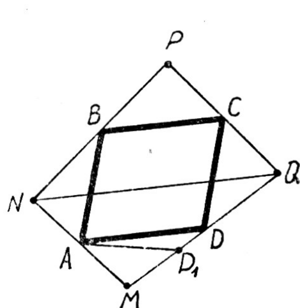


89 pav.

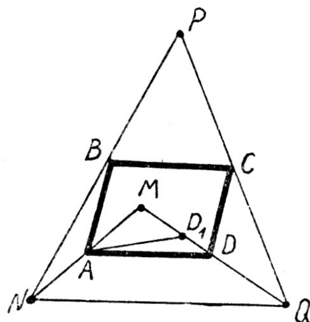
86. a) Pažymėkime $\angle ADB=x$; tada $\angle BDC=2x$, $\angle CAD=\frac{3}{2}x$ (89 pav.). Kadangi trikampis ACD lygiašonis, tai ir $\angle ACD=\frac{3}{2}x$, ir šiame trikampyje $\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+x+2x=180°$; $x=30°$. $\angle APB$, kaip trikampio APD priekampis, lygus $x+\frac{3}{2}x=\frac{5}{2}x$. Pažymėkime $\angle BAC=y$. Kadangi trikampis ABD lygiašonis, tai $\angle BAD=\angle ABD=\frac{3}{2}x+y$. Todėl $\frac{3}{2}x+y+\frac{3}{2}x+y+x=180°$; $y=30°$. $\angle BPC$ kaip trikampio PCD priekampis lygus $\frac{3}{2}x+2x=105°$. Pažymėkime $\angle BCP=z$. Iš lygiašonio trikampio BCD: $\angle CBD=\angle BCD=\frac{3}{2}x+z=45°+z$. Trikampyje BCP: $z+45°+z+105°=180°$; $z=15°$. Suraskime duotojo keturkampio kampus. $\angle A=y+\frac{3}{2}x=75°$; $\angle B=\frac{3}{2}x+y+z+\frac{3}{2}x=135°$; $\angle C=z+\frac{3}{2}x=60°$; $\angle D=x+2x=90°$.

b) $\triangle ABP\sim\triangle ABD$, nes $\angle ABP=\angle BPA=\angle BAD=75°$. Todėl $\frac{BP}{AB}=\frac{AB}{BD}$; $AB^2=BP\cdot BD$.

87. Galimi du taško M padėties atvejai pavaizduoti paveikslėliuose (90 pav., a ir b): taškas M gali būti lygiagretainio ABCD

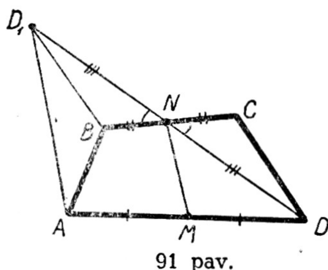


a)

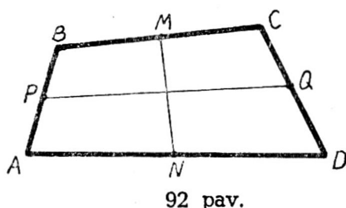


b)

90 pav.



91 pav.



92 pav.

išorėje arba viduje. Kiekvienu atveju randame tašką N, simetrišką taškui M taško A atžvilgiu, po to tašką P, simetrišką taškui N taško B atžvilgiu, tašką Q, simetrišką taškui P taško C atžvilgiu. Sujungsime taškus M ir Q. Jei D_1 — atkarpos MQ vidurys, tai išvedę keturkampio MNPQ įstrižainę NQ, gausime: BC — trikampio NPQ vidurinė linija, $BC \parallel NQ$, $BC=\frac{1}{2}NQ$. AD_1 — trikampio NMQ vidurinė linija, $AD_1 \parallel NQ$, $AD_1=\frac{1}{2}NQ$, t. y. $BC \parallel AD_1$ ir $BC=AD_1$. Vadinasi, $ABCD_1$ — lygiagretainis. Bet pagal uždavinio sąlygą ABCD — lygiagretainis, ir kadangi taškai A, B, C vienareikšmiškai nusako lygiagretainį, tai taškas D_1 sutampa su tašku D. Vadinasi, suradome taškus N, P, Q, tenkinančius uždavinio sąlygą.

88. Nagrinėkime keturkampį ABCD (91 pav.). Atkarpų BC ir AD vidurio taškus pažymėkime raidėmis N ir M. Raskime tašką D_1, simetrišką taškui D taško N atžvilgiu, ir sujunkime jį atkarpomis su taškais A ir B. Gausime lygius trikampius: $\triangle BND_1= =\triangle CND$ pagal dvi kraštines ($BN=CN$, $ND_1=ND$) ir kampą tarp jų, todėl $BD_1=CD$. Pagal trikampio nelygybę $AD_1<AB+BD_1= =AB+CD$. Kadangi MN — trikampio DD_1A vidurinė linija, tai $MN=\frac{1}{2}AD_1$; $AD_1=2MN$. Vadinasi, $2MN<AB+CD$, $MN<\frac{AB+CD}{2}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Pastaba. Teiginys lieka teisingas ir tada, kai duotasis keturkampis neiškilasis.

89. Jei duotojo keturkampio ABCD (92 pav.) priešingos kraštinės nelygiagrečios, tai galima pasinaudoti ankstesniojo uždavinio sprendimo rezultatais: jei M, N, P, Q — atitinkamai atkarpų BC, AD, AB ir CD vidurio taškai, tai $MN<\frac{1}{2}(AB+CD)$; $PQ< <\frac{1}{2}(BC+AD)$. Sudėkime šias nelygybes: $MN+PQ<\frac{1}{2}(AB+BC+ +CD+DA)$, t. y. atstumų tarp priešingų keturkampio ABCD kraš-

tinių vidurio taškų suma yra mažesnė už pusę keturkampio perimetro. Kadangi pagal sąlygą ta suma turi būti lygi pusei perimetro, tai priešingos keturkampio ABCD kraštinės turi būti lygiagrečios, t. y. keturkampis turi būti lygiagretainis.

90. Jei atkarpa, jungianti du iškilojo keturkampio kraštinių vidurio taškus, lygi pusei kitų dviejų kraštinių sumos, tai pagal 88-tą uždavinį tame keturkampyje mažiausiai dvi priešingos kraštinės lygiagrečios. Jei analogiška sąlyga bus tenkinama ir atkarpai, jungiančiai du kitų keturkampio kraštinių vidurio taškus, tai ir kita kraštinių pora lygiagreti ir keturkampis bus lygiagretainis. Jei antrajai atkarpai ši sąlyga netenkinama, tai keturkampyje bus tik dvi lygiagrečios kraštinės, t. y. jis bus trapecija.

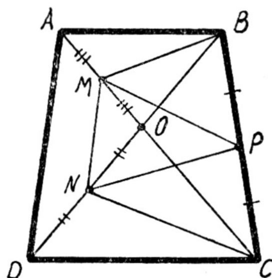
91. Kadangi $AB \parallel CD$ (93 pav.), tai $\angle BDC = \angle ABD = 60°$; $\angle ACD = \angle BAC = 60°$. Vadinasi, trikampis OCD lygiakraštis, $OD = OC = CD$. Kadangi $\triangle AOD = \triangle BOC$ (pagal dvi kraštines: $AO = BO$, $DO = CO$ ir kampą tarp jų), tai $AD = BC$, taigi ABCD — lygiašonė trapecija.

Trikampio ODC pusiaukraštinė CN yra ir aukštinė, todėl $\triangle BNC$ statusis ($\angle N = 90°$). Jo pusiaukraštinė NP lygi pusei įžambinės BC (įrodymui galime trikampį BNC papildyti iki stačiakampio ir pritaikyti jo įstrižainių savybę arba žr. 27 užd.), t. y. $NP = {}^1/_2 BC$.

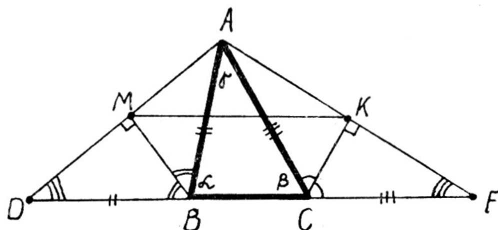
Lygiakraščio trikampio AOB pusiaukraštinė BM yra ir aukštinė. Iš to išplaukia, kad stačiojo trikampio BMC ($\angle M = 90°$) pusiaukraštinė MP yra lygi pusei įžambinės BC, t. y. $MP = {}^1/_2 BC$.

Atkarpa MN yra trikampio AOD vidurinė linija, todėl $MN = {}^1/_2 AD$. Palyginę NP, MP ir MN išraiškas ir prisiminę, kad $AD = BC$, gauname: $NP = MP = MN$, t. y. trikampis MNP yra lygiakraštis.

92. Pratęskime AM ir AK iki jų susikirtimo su tiese BC (94 pav.). Duotojo trikampio kampus pažymėkime α, β, γ. Tada $\angle ABM = \angle MBD = \frac{1}{2} \angle ABD = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Vadinasi,



93 pav.



94 pav.

$\angle ADB=\angle DAB=\frac{\alpha}{2}$ (trikampiai DMB ir AMB statieji). Analogiškai $\angle CEA=\angle CAE=\frac{\beta}{2}$. Iš to išplaukia, kad trikampiai ABD ir ACE lygiašoniai ($DB=AB$, $CE=AC$) ir pusiaukampinės BM ir CK yra ir pusiaukraštinės. Todėl MK — trikampio ADE vidurinė linija, $MK=\frac{1}{2}DE$. Bet $DE=DB+BC+CE=AB+BC+AC$. Vadinasi, $MK=$ $=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$.

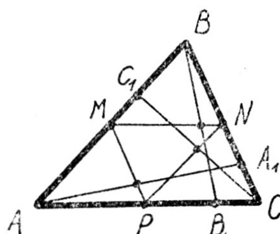
93. Pirmiausia atkreipkime dėmesį į tai, kad jei tiesė kerta dvi trikampio kraštines ir neina per trikampio viršūnę, tai ji nekerta trečiosios trikampio kraštinės. Įrodymas remiasi tuo, kad atkarpa, jungianti du taškus, esančius priešingose tiesės pusėse, kerta tą tiesę. Jei taškai yra vienoje tiesės pusėje, tai juos jungianti atkarpa nekerta tos tiesės. Mūsų teigimu tiesė kerta dvi trikampio kraštines. Vadinasi, yra dvi trikampio viršūnės, esančios vienoje tiesės pusėje. Iš to išplaukia, kad jungianti tas viršūnes atkarpa, trečioji trikampio kraštinė, nekerta tiesės.

Dabar pereisime prie duotojo uždavinio. Tegul B_1 — bet koks atkarpos AC vidinis taškas (95 pav.). Jei MN — trikampio ABC vidurinė linija, tai pagal Talio teoremą atkarpos BB_1 vidurio taškas yra atkarpoje MN. Analogiškai įrodoma, kad atkarpos CC_1 ir AA_1 vidurio taškai yra trikampio ABC vidurinių linijų NP ir MP vidiniai taškai.

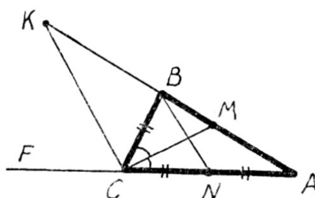
Jei atkarpų AA_1, BB_1 ir CC_1 vidurio taškai būtų vienoje tiesėje, tai ta tiesė turėtų bendrų taškų su trimis trikampio kraštinėmis, ko pagal tai, kas buvo pasakyta anksčiau, negali būti. Vadinasi, tie taškai nėra vienoje tiesėje.

94. Pagal ankstesnįjį uždavinį atkarpų, jungiančių trikampio viršūnes su priešingų kraštinių vidiniais taškais, vidurio taškai nėra vienoje tiesėje. Kadangi šiame uždavinyje trikampio aukštinių vidurio taškai yra vienoje tiesėje, tai ne visi aukštinių pagrindai yra trikampio kraštinių vidiniai taškai. Iš to išplaukia, kad dvi aukštinės kertasi trikampio viršūnėje, t. y. trikampis statusis. Aukštinių vidurio taškai yra to trikampio vidurinėje linijoje, einančioje per statinių vidurio taškus.

Remiantis ankstesniuoju uždaviniu, duotasis trikampis negali būti smailusis. Jis negali būti ir bukasis: aukštinės, išvestos iš trikampio bukojo kampo viršūnės, vidurio taškas turi būti vidurio linijoje, lygiagrečioje didesniajai trikampio kraštinei. Kitų dviejų aukštinių (jų pagrindai yra trikampio kraštinių tęsiniuose) vidurio taškai turi priklausyti kitoms dviem to trikampio



95 pav.

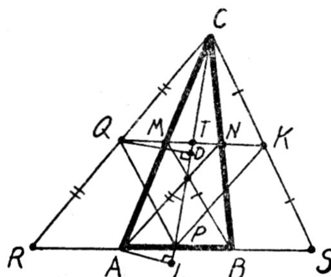


96 pav.

vidurio linijoms, todėl šie trys taškai bus vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai minėtų dviejų aukštinių vidurio taškai sutaps su trikampio kraštinių vidurio taškais, t. y. trikampis turi būti statusis.

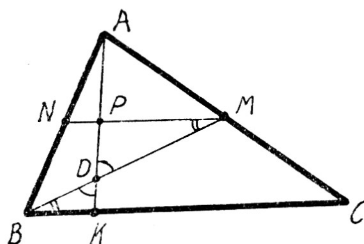
95. Visi keturi trikampiai, apie kuriuos kalbama uždavinyje, turės vieną ir tą pačią aukštinę, jei išvesime statmenį per tašką C (96 pav.). Todėl jų plotai proporcingi pagrindų ilgiams. Kadangi pusiaukampinė dalina priešais esančią kraštinę į dalis, proporcingas šalia esančioms kraštinėms ([1], 535 užd.), tai $\frac{BM}{AM}=$ $=\frac{BC}{AC}=\frac{1}{2}$. Vadinasi, $AM=2BM$ ir $S_{BCM}={}^1/_2S_{ACM}$. Kadangi $AB=$ $=3\ BM$, tai $S_{BCM}={}^1/_3S_{ABC}$. Sujunkime taškus B ir N ($CN=NA$), pažymėkime $\angle BCA=\alpha$. Tada $\angle KCB={}^1/_2\angle FCB={}^1/_2(180°-\alpha)=$ $=90°-\alpha/2$; $\angle KCA=\angle KCB+\angle BCA=90°-\alpha/2+\alpha=90°+\alpha/2$; $\angle CBN=\angle CNB=\frac{180°-\alpha}{2}=90°-\alpha/2$. Pagal trikampio priekampio savybę $\angle BNA=\angle BCN+\angle CBN=\alpha+90°-\alpha/2=90°+\alpha/2$. Vadinasi, $\angle BNA=\angle KCA$ ir BN — trikampio AKC vidurinė linija. Iš čia $AB=KB$ ir kadangi $AB=3\cdot BM$, tai $KM=4\ BM$, ir iš to išplaukia $S_{BCM}={}^1/_4\ S_{CMK}$.

96. Per trikampio ABC (97 pav.) pusiaukraštinės CP galus C ir P išvesime tieses, lygiagrečias kitoms šio trikampio pusiaukraštinėms: $CK\|BM$, $PQ\|BM$, $PK\|AN$, $CQ\|AN$. MN — trikampio ABC vidurinė linija, todėl pagal Talio teoremą ([1], 385 užd.) QK — trikampio RCS vidurinė linija. Vadinasi, $AN=RQ=$ $=QC$; $BM=PQ$ ir trikampis PQC ir yra tas trikampis EFG, apie kurį kalbama uždavinio sąlygoje.

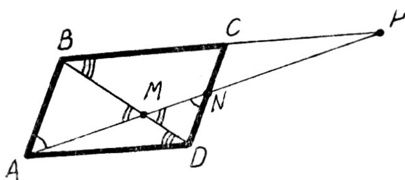


97 pav.

Trikampiai PQC ir PAC turi bendrą pagrindą PC, todėl jų plo-



98 pav.



99 pav.

tai proporcingi aukštinėms, išvestoms į bendrą pagrindą. Iš čia $\frac{S_{APC}}{S_{QPC}}=\frac{h_1}{h_2}$, kur $h_1=AL$, $h_2=QD$. Kadangi $\angle CTQ=\angle CPR$, tai $\triangle TQD\sim\triangle PAL$ ir todėl $\frac{h_1}{h_2}=\frac{AP}{QT}$. Kadangi $MT={}^1/_2AP$, o $QM=$ $=PB=AP$, tai $QT=QM+MT={}^3/_2\ AP$ ir $\frac{h_1}{h_2}={}^2/_3$. Iš to $S_{APC}=$ $={}^2/_3S_{QCP}$. Bet $S_{APC}={}^1/_2\ S_{ABC}$. Vadinasi, $\frac{S_{QCP}}{S_{ABC}}={}^3/_4$.

97. Per tašką M nubrėžkime tiesę, lygiagrečią tiesei BC (98 pav.). Tos tiesės atkarpa MN yra trikampio ABC vidurinė linija, todėl $MN={}^1/_2\ BC$. Kadangi NP — yra ir trikampio ABK vidurinė linija, tai $NP={}^1/_2\ BK$. Tačiau $PM=NM-NP={}^1/_2\ BC-$ $-{}^1/_2\ BK$. Kadangi $\triangle BDK\sim\triangle MDP$, tai $\frac{BK}{PM}={}^1/_2$; $\frac{BK}{1/2\,(BC-BK)}=$ $={}^1/_2$; $\frac{BK}{BC}={}^1/_5$. Kadangi trikampių ABK ir ABC viršūnė A bendra, o prieš ją esančios kraštinės yra vienoje tiesėje, tai jų plotų santykis lygus tų kraštinių santykiui. $\frac{S_{ABK}}{S_{ABC}}=\frac{BK}{BC}={}^1/_5$.

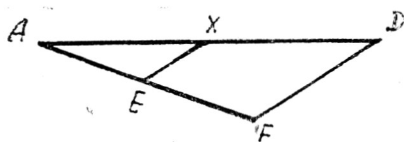
98. Trikampis MAB panašus į trikampį MND (99 pav.), todėl $\frac{AM}{MN}=\frac{BM}{MD}$. Iš trikampių MPB ir MAD panašumo išplaukia: $\frac{MP}{AM}=$ $=\frac{BM}{MD}$. Iš dviejų gautų lygybių randame: $\frac{MP}{AM}=\frac{AM}{MN}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

99. Sakykime, kad AB — duotoji šoninė kraštinė. X — ieškomasis taškas (100 pav., a). Tada $\frac{MX}{NX}=n$, $MX\perp AB$, $NX\perp CD$. Trapecija lygiašonė, todėl $\angle MAX=\angle NDX$. Vadinasi, $\triangle AXM\sim$ $\sim\triangle DXN$ ir $\frac{AX}{DX}=\frac{MX}{NX}=n$. Taigi, norint rasti tašką X, atkarpą AD reikia padalyti santykiu $AX/DX=n$.

Išnagrinėkime keletą atvejų.



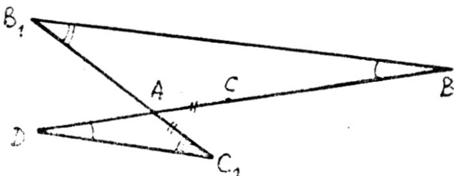
a)



b)

100 pav.

a) Sakykime, n=2. Nubrėžkime bet kurį spindulį, pavyzdžiui, AF (100 pav., b) ir atidėkime jame bet kurią atkarpą AE ir atkarpą AF=2 AE. Kitos tiesės spindulyje atidėkime atkarpą, lygią trapecijos pagrindui AD. Tašką F sujunkime atkarpa su tašku D ir išveskime tiesei DF lygiagrečią tiesę: EX||DF. Tiesių AD ir EX susikirtimo taškas X — ieškomasis taškas. Tai išplaukia iš trikampių AEX ir AFD panašumo.



101 pav.

b) Kai n=3, viską darome taip pat, kaip ir anksčiau, tik AF=3 AE.

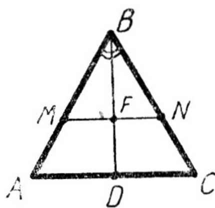
c) kai n=4, AF=4 AE.

100. Sakykime, kad D — ieškomasis taškas, kuriam tenkinama lygybė $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{CB}$ (101 pav.). Jei AC<CB, tai $\frac{AD}{BD}<1$, AD<BD. Taškas D turi būti tiesėje AB kairiau taško A. Kadangi duotojo ilgio atkarpą nuo tam tikro taško duotąja kryptimi galime atidėti vienareikšmiškai, tai tokių taškų negali būti daugiau kaip vienas.

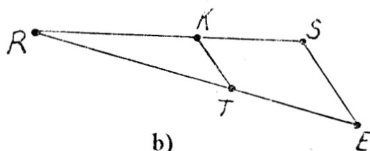
Jei AC>CB, tai taškas D turi būti tiesėje AB dešiniau taško B.

Panagrinėsime atvejį, kai $\frac{AC}{CB}<1$ (kai $\frac{AC}{CB}>1$ sprendimas bus analogiškas, jei tašką A pakeisime tašku B).

Per atkarpos AB tašką A išveskime bet kokią tiesę ir joje atidėkime $AC_1=AC$, $C_1B_1=CB$. Išveskime $C_1D \parallel BB_1$. Įrodysime, kad D — ieškomasis taškas. $\triangle ADC_1 \sim \triangle ABB_1$, todėl $\frac{AD}{AC_1}=\frac{AB}{AB_1}$. Bet $AC_1=AC$, $AB=AC+CB$, $AB_1=C_1B_1-C_1A=CB-AC$. Todėl $\frac{AD}{AC}=$
$=\frac{AC+CB}{CB-AC}$. Iš čia $AD\cdot(CB-AC)=AC\cdot(AC+CB)$; $AD\cdot CB=$



a)



b)

102 pav.

$=AC(DA+AC+CB)$; $AD\cdot CB=AC\cdot DB$; $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$. Iš to išplaukia, kad taškas D tenkina uždavinio sąlygą.

Ištirsime sprendinį. Nubraižyti brėžinį, kaip nurodyta, galėsime, kai taškas B_1 nesutaps su tašku A. Sutapimą gausime, kai $AC_1=C_1B_1$, t. y. $AC=CB$.

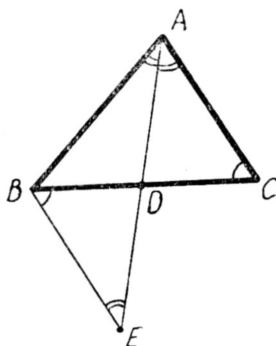
Uždavinys turi vienintelį sprendinį, kai C — atkarpos AB nevidurio taškas. Kai $AC=CB$, uždavinys sprendinio neturi.

101. Nubraižykime lygiašonį trikampį su duotuoju kampu prie viršūnės ir aukštine BD, lygia ieškomojo trikampio aukštinės ir pagrindo sumai, $BD=h+a$, kur h — aukštinė, a — pagrindas (102 pav., a). Jei BMN — ieškomasis trikampis, tai $\triangle BMN\sim$ $\sim\triangle BAC$ ir $\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{FN}$ arba $\frac{BD}{AC}=\frac{BF}{MN}$; $\frac{h+a}{AC}=\frac{h}{a}$. Nurodytu būdu nubraižėme atkarpą, lygią AC. Toliau darome taip: braižome atkarpą $RS=h+a$ (102 pav., b). Išvedame spindulį RE ir atidedame jame $RT=h+a$, $TE=AC$. Tašką E sujungiame su S ir išvedame $TK\|ES$. Kadangi $TK\|ES$, tai pagal Talio teoremą $\frac{RT}{TE}=$ $=\frac{RK}{KS}$; $\frac{h+a}{AC}=\frac{h}{a}$; $RK=h$; $KS=a$. Nubraižėme atkarpas, lygias ieškomojo trikampio aukštinei ir pagrindui. Tolesnis sprendimas akivaizdus.

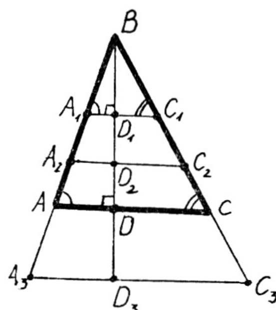
Uždavinys turi vienintelį sprendinį, jei duotas kampas $<180°$.

102. Jei trikampis ABC ieškomasis (103 pav.), tai jame AB ir AC — duotosios kraštinės, AD — pusiaukampinė. Per tašką B išvesime $BE\|AC$. Tada $\triangle ADC\sim\triangle EDB$ ir $\frac{BD}{DC}=\frac{DE}{AD}$. Bet pagal trikampio kampo pusiaukampinės savybę $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Vadinasi, $DE=AD\cdot\frac{AB}{AC}$ ir galime nubraižyti atkarpą, lygią DE. Trikampis ABE lygiašonis, $BE=AB$.

Pereisime prie brėžimo. Pirmiausia braižome atkarpą DE, po to $AE=AD+DE$. Braižome trikampį ABE pagal tris kraštines.



103 pav.



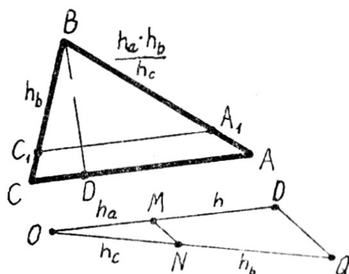
104 pav.

Braižome kampą EAC, lygų kampui EAB ir spindulyje AC atidedame atkarpą AC, lygią trikampio kraštinei. Sujungus taškus C ir B, gausime ieškomąjį trikampį, kuriame AB ir AC — duotosios kraštinės, AD — pusiaukampinė. Trikampį ABE galima nubrėžti, jei $AB+BE>AE$. Kadangi $AE=AD+$ $+DE=AD+AD\cdot\frac{AB}{AC}=AD\cdot\frac{AB+AC}{AC}$, tai $2\ AB>AD\cdot\frac{AB+AC}{AC}$, $AD<\frac{2\ AB\cdot AC}{AB+AC}$. Jei ši sąlyga tenkinama, tai uždavinys turi vienintelį sprendinį.

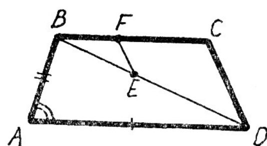
103. Imame bet kokią atkarpą A_1C_1 ir braižome panašų į ieškomąjį trikampį A_1BC_1 (104 pav.) pagal du kampus $\angle A_1=\angle A$ ir $\angle C_1=\angle C$. Išvedame tiesę $BD_1\perp A_1C_1$ ir atidedame $BD_2=B_1D_1+$ $+A_1C_1$, o taip pat atkarpą BD_3, lygią duotai sąlygoje sumai. Išvesime $A_2C_2\|A_3C_3\|A_1C_1$. Kadangi $\triangle BD_2C_2\sim\triangle BD_3C_3$, tai tegul $\frac{BD_2}{BD_3}=k$. Tada $BD_1\cdot k=BD$, $BD=\frac{BD_1\cdot BD_2}{BD_3}$. Suradę tašką D, išvedame $AC\|A_1C_1$. Trikampis ABC — ieškomasis.

Kai $\angle A+\angle C\geqslant180°$, uždavinys sprendinio neturi. Visais kitais atvejais turi vienintelį sprendinį.

104. Kadangi $S_{ABC}={}^1/_2\,ah_a=$ $={}^1/_2\,bh_b={}^1/_2\,ch_c$, tai $a/b=h_b/h_a$, t. y. $a=k\cdot h_b$, $b=k\cdot h_a$, kur k — proporcingumo koeficientas (105 pav.). Iš to išplaukia, kad ieškomojo trikampio ABC kraštinės a, b, c proporcingos atkarpoms h_b, h_a, $\frac{h_a\cdot h_b}{h_c}$. Pagal šias tris atkarpas braižome trikampį A_1BC_1. Jis bus panašus į ieškomąjį trikampį. Per tašką B išvedame aukš-



105 pav.



106 pav.

tinę ir atidedame $BD=h_b$. Per tašką D išvesime $AC \| A_1C_1$. Trikampis ABC — ieškomasis.

Uždavinys turi vienintelį sprendinį, jei atkarpos h_b, h_a, $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$ tenkina trikampio nelygybę.

Pastaba. Atkarpą h, lygią $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$, galima nubraižyti tokiu būdu: imame bet kokį kampą DOQ ir atidedame jo kraštinėse atkarpas h_a, h_b, h_c, kaip parodyta 105 paveikslėlyje. Sujungiame taškus M ir N ir išvedame $DQ \| MN$. Tada $\frac{h_c}{h_b}=\frac{h_a}{h}$; $h=\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$.

105. Braižome trikampį ABD (106 pav.) pagal dvi kraštines (AB ir AD) ir kampą tarp jų. Per tašką B išvedame $BC \| AD$. Kraštinių CD ir BC santykį pažymėkime k. Spindulyje BC paimame bet kokį tašką F ir spinduliu $FE=k \cdot BF$ nuo F darome atžymą atkarpoje BD. Išvedame $DC \| EF$. ABCD — ieškomoji trapecija.

Kadangi $\frac{CD}{BC}=k$, tai $BC=\frac{CD}{k}$. Pagal sąlygą $BC<AD$, todėl $\frac{CD}{k}<AD$, $\frac{CD}{AD}<k$.

Iš to išplaukia, kad jei $CD \geqslant k \cdot AD$, tai uždavinys sprendinių neturi (lygybės atveju gauname lygiagretainį).

Kai $\angle BAD<180°$, trikampį ABD visada bus galima nubrėžti (jei kampas $\geqslant 180°$ — uždavinys neturi sprendinio). Kadangi apskritimas su centru F ir spinduliu $k \cdot BF$, priklausomai nuo k, kerta atkarpą BD dviejuose, viename taške arba visai jos nekerta, tai uždavinys gali turėti 2, 1, 0 sprendinius.

Pastaba. Galima spręsti ir kitaip. Nubrėžę trikampį ABD, spindulyje BC ($BC \| AD$) rasime taškus C, kuriems tenkinama lygybė $CD : BC=k$.

Spindulyje BD bus du taškai (M — atkarpoje BD ir M_1 — spindulyje DM_1), tokie, kad $MD : MB=k$ ir $M_1D : M_1B=k$. Bet koks apskritimo, nubrėžto ant atkarpos MM_1, kaip ant skersmens, taškas N turi tokią savybę: $ND : NB=k$. Šis apskritimas ir spindulys BC gali turėti 0, 1, 2 bendrus taškus.

Jei $k=1$, tai išvedame atkarpos BD vidurio statmenį. Šiuo atveju $BC=CD$.

106. Kadangi pagal sąlygą kvadrato, kurio kraštinė a, plotas lygus plotui rombo, kurio įstrižainės d_1 ir d_2, tai $a^2=\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$. Pagal sąlygą $d_1/d_2=a_1/b_1$, kur a_1, b_1 — duotosios atkarpos. Tada

a) b)

107 pav.

$d_2 = d_1 \cdot b_1/a_1$ ir $a^2 = {}^1/_2\, d_1^2 \cdot b_1/a_1$. Iš čia $d_1^2 = 2\,a^2 \cdot a_1/b_1$; $d_2^2 = 2\,a^2 \cdot b_1/a_1$;
$d_1 = a\sqrt{\frac{2a_1}{b_1}}$, $d_2 = a\sqrt{\frac{2b_1}{a_1}}$; $d_1 = \sqrt{2\,a \cdot \frac{a \cdot a_1}{b_1}}$; $d_2 = \sqrt{2a \cdot \frac{a \cdot b_1}{a_1}}$.

Jei C (107 pav., a) — bet koks apskritimo, nubrėžto ant atkarpos AB, kaip ant skersmens, taškas, tai AO—BO=CO ir $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Kadangi $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, tai $\angle 1 + \angle 4 = \angle C = 90°$. Pagal stačiojo trikampio aukštinės, išvestos iš stataus kampo viršūnės, savybę $CD = \sqrt{AD \cdot BD}$.

Iš to išeina, kad, norint nubrėžti duotųjų atkarpų AD ir BD vidurinę proporcingąją, reikia nubrėžti atkarpą AB=AD+DB, ant jos, kaip ant skersmens, nubrėžti apskritimą ir išvesti $DC \perp AB$.

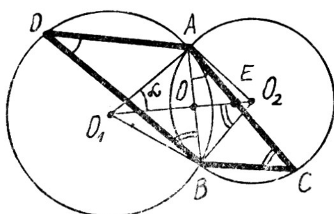
Ketvirtosios proporcingosios duotosioms atkarpoms a, b, c $\left(x = \frac{bc}{a}\right)$ brėžimo būdas parodytas 107 pav., b.

Pereisime prie atkarpų d_1 ir d_2 brėžimo. Čia nurodytais būdais brėžiame atkarpas $x_1 = \frac{a \cdot a_1}{b_1}$, $x_2 = \frac{a \cdot b_1}{a_1}$ ir $x_3 = 2\,a$, vėliau brėžiame atkarpas $d_1 = \sqrt{x_3 \cdot x_1}$ ir $d_2 = \sqrt{x_3 \cdot x_2}$.

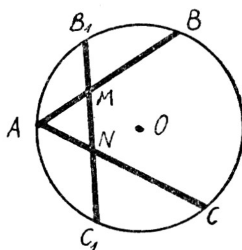
Rombo brėžimas pagal jo įstrižaines d_1 ir d_2 akivaizdus. Uždavinys turi vienintelį sprendinį.

107. Kryžminiai kampai AMC ir BMC_1 lygūs (108 pav.). Bet šie kampai yra įbrėžtiniai, todėl $\smile AC = \smile BC_1$. Kadangi $\smile CKM = \smile C_1LM = 180°$, tai $\smile AKM = 180° - \smile AC = 180° - \smile BC_1 = \smile BLM$. Vadinasi, įbrėžtiniai kampai AA_1M ir BB_1M yra lygūs, ir todėl $AA_1 \| BB_1$.
$= \smile BLM$. Vadinasi, įbrėžtiniai tinkamas ir tada, kai taškai A ir A_1 yra vienoje tiesės CC_1 pusėje.

108 pav.



109 pav.



110 pav.

108. a) Pažymėkime $\angle AO_1O_2=\alpha$ (109 pav.). Tada $\angle BO_1O_2=$ $=\alpha$ (žr. [1], 715 užd.). Spindulys O_1A statmenas liestinei AE, $\angle O_1AE=90°$, todėl $\angle AEO_1=90°-\alpha$ ir $\angle OAE=\alpha$. Analogiškai jei $\angle ABD=\beta$, tai ir $\angle O_1O_2B=\beta$. Centrinis kampas AO_1B lygus 2α, todėl įbrėžtinis kampas ADB lygus α. Dėl tos pačios priežasties kampas ACB lygus β. Vadinasi, $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ ir $\angle DAB=\angle ABC$. Ir todėl $AD \parallel BC$.

b) Iš trikampių ABD ir ABC panašumo:
$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{BC}$; $AB^2=AD\cdot BC$.

c) Pagal panašių figūrų plotų santykio teoremą $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=k^2$, kur k — panašumo koeficientas, $k=\frac{BD}{AC}$.

Iš kitos pusės $\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}}=\frac{AD\cdot AB}{AB\cdot BC}$, nes $\angle DAB=\angle ABC$. Todėl $\left(\frac{BD}{AC}\right)^2=\frac{AD\cdot AB}{AB\cdot BC}$; $BD^2 : AC^2=AD : BC$.

109. Pagal 718 uždavinio (žr. [1]) įrodymą (kampas, kurio viršūnė yra apskritimo viduje) $\angle ANM=\frac{1}{2}(\smile AB_1+\smile C_1C)$; $\angle AMN=\frac{1}{2}(\smile B_1B+\smile AC_1)$. Bet $\smile AB_1=\smile B_1B$ ir $\smile AC_1=\smile C_1C$. Todėl $\angle AMN=\angle ANM$ ir iš to $AM=AN$ (110 pav.).

110. a) Tegul tiesių susikirtimo taškas yra apskritimo viduje (111 pav., a). Išvesime $OO_1 \perp AB$, $OO_2 \perp CD$. Kadangi $CO=OD$ ir $AO=OB$, tai $\triangle COD=\triangle AOB$ ir jie lygiašoniai. Todėl $CO_2=O_2D=$ $=AO_1=O_1B$; $OO_1=OO_2$. $\triangle FOO_1=\triangle FOO_2$, todėl $FO_1=FO_2$. Iš to $BF=DF$ ir todėl $CF=AF$.

b) Tegul dabar tiesių susikirtimo taškas yra apskritimo išorėje (111 pav., b), $BC=DF$. $\triangle BOC=\triangle DOF$ pagal tris kraštines, todėl $\angle CBO=\angle FDO$. $\triangle BOD$ lygiašonis, todėl $\angle OBD=\angle ODB$. Vadinasi, $\angle CBD=\angle FDB$, todėl $\angle ABD=\angle ADB$ ir $AB=AD$. Kadangi $AC=AB+BC$, $AF=AD+DF$, tai ir $AC=AF$.

a)

b)

111 pav.

112 pav.

113 pav.

111. Sakykime BB_1 — apskritimo skersmuo (112 pav.); $BB_1 \perp BD$. $\angle BAB_1 = 90°$; $AA_1 \perp BB_1$. Todėl $\frac{BB_1}{AB} = \frac{AB}{BA_1}$; $AB^2 = BB_1 \cdot A_1B$; $A_1B = AD$; $\frac{AB^2}{AD} = BB_1$ — pastovus dydis duotajam apskritimui.

112. Statmenai BC išvesime O_1M_1 ir O_2M_2 (113 pav.). Išvesime $M_2D \parallel O_1O_2$. Iš stačiojo trikampio $M_1M_2D : M_1M_2 < M_2D = O_1O_2$. Tik tada, kai $BC \parallel O_1O_2$, keturkampis $O_1M_1M_2O_2$ bus stačiakampis ir $M_1M_2 = O_1O_2$.

Atkarpa M_1M_2 bus ilgiausia, kai $BC \parallel O_1O_2$. Bet $BC = 2M_1M_2$. Iš to išplaukia, kad atkarpa BC bus ilgiausia tada, kai ji bus lygiagreti O_1O_2.

113. 1) Tegul $ON = PM$ (114 pav.). Sujunkime N su D. $\angle PMO = \angle MOD$, nes $MP \parallel OD$ ir $\frac{PM}{OM} = \frac{ON}{OD}$, nes $OM = OD$. Iš to išplaukia, kad $\triangle OMP \sim \triangle ODN$. Iš čia $\angle OND = \angle OPM = 90°$. Vadinasi, taškas N yra apskritime, kurio skersmuo OD.

114 pav.

2) Tegul N — apskritimo su skersmeniu OD taškas. $\triangle ODN = \triangle OPM$, nes šiuose sta-

čiuosiuose trikampiuose $\angle PMO = \angle MOD$. Todėl $\frac{PM}{OM} = \frac{ON}{OD}$. Bet $OM = OD$, todėl $PM = ON$.

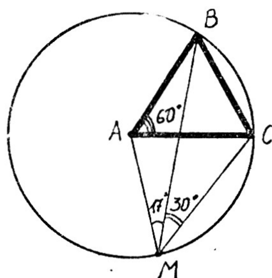
Analogiškas teigimas teisingas ir spinduliams, kurie yra viršutinėje pusplokštumėje AB atžvilgiu. Ieškomoji aibė yra dviejų apskritimų, kurių centrai yra AB statmename skersmenyje, o spinduliai lygūs pusei duotojo apskritimo spindulio, taškai.

114. Iš taško A kaip centro spinduliu AB išvesime apskritimą (115 pav.). Kadangi $AC = AB$, tai taškas C yra šiame apskritime. Centrinis kampas BAC lygus 60°, todėl $\smile BC = 60°$. Kadangi kampas BMC lygus 30°, tai taškas M turi priklausyti apskritimui: kampą BMC atitinka lankas BC, lygus 60°. Iš to $AM = AB$, $\triangle MAB$ lygiašonis, $\angle ABM = \angle AMB = 17°$. $\angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 60° - 17° = 43°$. $\angle BCM = 180° - (\angle CBM + \angle BMC) = 180° - 43° - 30° = 107°$; $\angle ACM = \angle BCM - \angle BCA = 107° - 60° = 47°$; $\angle CAM = 180° - \angle ACM - \angle AMC = 180° - 47° - 47° = 86°$; $\angle BAM = 60° + 86° = 146°$.

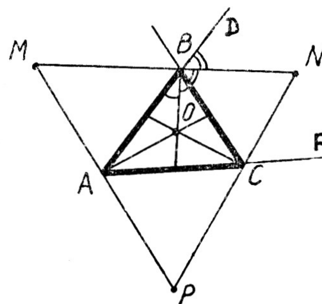
Pastaba. Antras sprendimo būdas: kadangi $AM = AC$, tai $\angle ACM = 47°$. Tada $\angle CAM = 86°$; $\angle BAM = 146°$; $\angle BCM = 107°$.

115. Kadangi trikampio kampo ir jo priekampio pusiaukampinės dalina tuos kampus pusiau, tai kampas tarp pusiaukampinių statusis (lygus pusei ištiestinio kampo). Pusiaukampinė BO statmena tiesei MN pagal sąlygą, todėl priekampio pusiaukampinė, kuri taip pat statmena BO, turi būti tiesėje MN (116 pav.). Todėl viršūnės M ir N yra tiesėje, kurioje yra trikampio ABC priekampio pusiaukampinė. Tą patį pakartojus kampų prie viršūnių A ir C pusiaukampinėms, gausime, kad visos trys trikampio MNP viršūnės yra tiesėse, kuriose yra trikampio ABC priekampių pusiaukampinės.

Kadangi taškas N yra kampo CBO pusiaukampinėje BN, tai jis vienodai nutolęs nuo šio kampo kraštinių BD ir BC. Iš kitos pusės, N — kampo BCF pusiaukampinės CN taškas ir todėl vie-

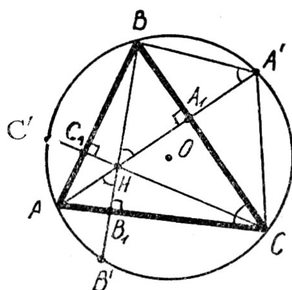


115 pav.



116 pav.

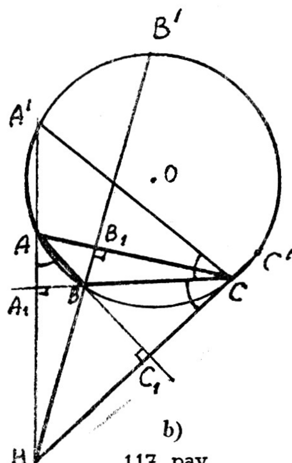
nodai nutolęs nuo šio kampo kraštinių CB ir CF. Iš to išeina, kad taškas N vienodai nutolęs nuo BD ir CF, ir todėl jis yra kampo DAF pusiaukampinėje. Vadinasi, trikampio ABC kampo A pusiaukampinė yra spindulyje AN.



a)

Atlikę tuos pačius veiksmus su taškais M ir P, gausime, kad trikampio MNP viršūnės yra tiesėse, kuriose yra trikampio ABC pusiaukampinės.

116. Apie trikampį ABC apibrėžkime apskritimą (117 pav., a). Tegul tiesė AA_1 kerta tą apskritimą taške A^1. Remiantis besikertančių stygų teorema, $AA_1 \cdot A_1A^1 = CA_1 \cdot BA_1$; $\frac{AA_1}{A_1C} = \frac{BA_1}{A_1A^1}$. Vadinasi, $\triangle AA_1C \sim \triangle BA_1A^1$ ir gauname $\angle BA^1A_1 = \angle A_1CA$ (1). Iš $\triangle AA_1C \sim \triangle AB_1H$ išplaukia, kad $\angle AHB_1 = \angle A_1CA$. Bet $\angle BHA_1 = \angle AHB_1 = \angle A_1CA$ (2). Iš (1) ir (2): $\angle BHA_1 = \angle BA^1A_1$. Iš to išplaukia, kad trikampio HBA^1 aukštinė BA_1 yra ir pusiaukraštinė, $HA_1 = A_1A^1$. Vadinasi, taškas A^1 simetriškas taškui H tiesės BC atžvilgiu. Taigi taškas, simetriškas taškui H tiesės BC atžvilgiu, yra apskritime, apibrėžtame apie trikampį ABC. Analogiškai uždavinio teiginį įrodome ir taškams B^1 ir C^1.



b)

117 pav.

Išnagrinėjome atvejį, kai duotasis trikampis ABC smailusis (taškas H yra trikampio viduje). Jei ABC — statusis trikampis, tai įrodymas akivaizdus.

Dabar išnagrinėsime atvejį, kai trikampis ABC bukasis (117 pav., b). Tiesių, kuriose yra duotojo trikampio aukštinės, susikirtimo tašką pažymėsime H. Sakykime, tiesė AH kerta apibrėžtą apie trikampį ABC apskritimą taške A^1. Įrodysime, kad taškai A^1 ir H simetriški tiesės BC atžvilgiu. Tam įrodysime, kad $\angle A^1CA_1 = \angle HCA_1 \cdot \angle AA^1B = \angle ACB$ ir $\angle BA^1C = \angle BAC$, kaip įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į vieną ir tą patį lanką. Kadangi $AB \perp HC$ ir $AA_1 \perp BC$, tai iš trikampio AA_1C: $\angle A_1AB + \angle BAC + \angle ACA_1 = 90°$; iš trikampio AC_1C: $\angle C_1CB + \angle BCA + \angle C_1AC = 90°$. Iš čia gauname $\angle A_1AB + \angle BAC + \angle ACA_1 = \angle C_1CB + \angle BCA + \angle C_1AC$; $\angle A_1AB = \angle C_1CB$. Kampas A_1AC yra trikampio AA^1C priekampis, todėl $\angle A_1AB + \angle BAC = \angle AA^1C + \angle A^1CA$. Iš to išeina, kad $\angle A^1CA + \angle ACA_1 = \angle A_1AB$, t. y.

$\angle A^1CA_1=\angle HCA_1$ ir trikampio A^1CH aukštinė CA_1 yra ir jo pusiaukampinė. Iš čia gauname, kad $A^1A_1=HA_1$ — taškas A^1 simetriškas taškui H tiesės BC atžvilgiu.

Analogiškai įrodoma, kad ir taškai B^1 ir C^1 simetriški taškui H atitinkamai tiesių AC ir AB atžvilgiu.

117. Apie trikampį ABC apibrėžkime apskritimą (118 pav.). Pagal sąlygą $\angle ABD=\angle DBC$. $\angle BCA=\angle BEA$, kaip įbrėžtiniai kampai, besiremiantys į lanką AB. Todėl $\triangle ABE\sim\triangle BCD$, $\frac{AB}{BD}=$ $=\frac{BE}{BC}$; $BE=\frac{AB\cdot BC}{BD}$ (1). Kadangi $\angle ABD=\angle DCE$ ir $\angle BDA=$ $=\angle CDE$, tai $\triangle ABD\sim\triangle CDE$;

$\frac{BD}{AD}=\frac{DC}{DE}$; $DE=\frac{AD\cdot DC}{BD}$ (2).

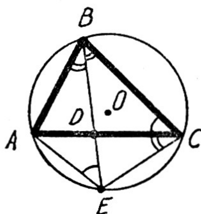
Iš (1) atimkime (2): $BE-DE=\frac{AB\cdot BC}{BD}-\frac{AD\cdot DC}{BD}$.

Bet $BE-DE=BD$, todėl $BD^2=AB\cdot BC-AD\cdot DC$.

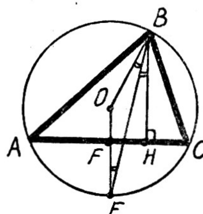
118. Kadangi įbrėžtiniai kampai ABE ir CBE lygūs (119 pav.), tai $\smile AE=\smile EC$, todėl centriniai kampai AOE ir COE lygūs, $\triangle AOF=\triangle COF$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Iš čia $\angle OFA=\angle OFC=90°$, nes šie kampai gretutiniai. Vadinasi, $OE\perp$ $\perp AC$, $OE\parallel BH$. Iš to išplaukia, kad priešiniai kampai HBE ir OEB lygūs. Trikampis OBE lygiašonis, todėl $\angle OEB=\angle OBE$. Taigi, $\angle OBE=\angle HBE$, t. y. BE — kampo OBH pusiaukampinė.

119. Sakykime $XC>XA$ ir $XC>XB$. Atidėkime $XD=XA$ (120 pav.). Kadangi įbrėžtiniai kampai ABC ir AXC remiasi į lanką AC, tai jie lygūs 60°. Trikampis ADX lygiakraštis, nes jis yra lygiašonis ir jo kampas prie viršūnės lygus 60°. Todėl $\angle ADX=$ $=60°$. Vadinasi, $\angle ADC=120°$, $\angle BXC=\angle BAC=60°$. Iš to $\angle AXB=120°$. Be to, $AC=AB$, tada $\triangle ABX=\triangle ACD$. Todėl $CD=$ $=BX$ ir $CX=CD+DX=BX+AX$, ką ir reikėjo įrodyti.

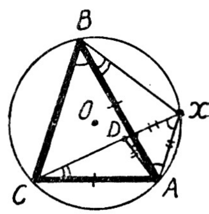
120. Nubraižykime brėžinį, kaip parodyta 121 paveikslėlyje. $\angle ADC=\angle ADB+\angle BDC=\frac{1}{2}\smile AB+\frac{1}{2}\smile BC$; $\angle AB_1C=\angle AB_1B+$ $+\angle BB_1C=\frac{1}{2}\smile AB+\frac{1}{2}\smile BC$. Vadinasi, $\angle ADC=\angle AB_1C$.



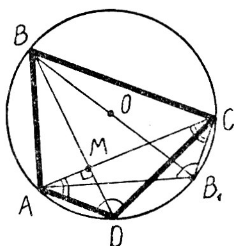
118 pav.



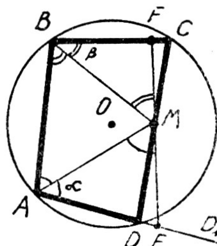
119 pav.



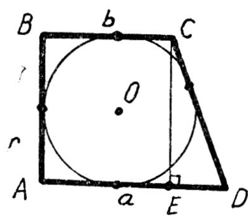
120 pav.



121 pav.



122 pav.

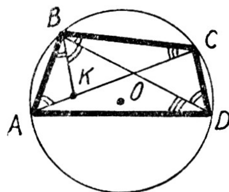


123 pav.

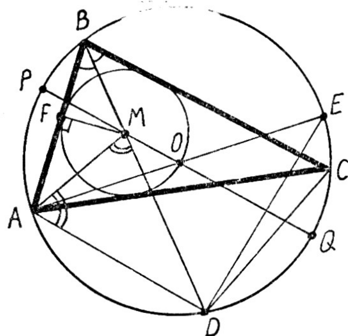
$\angle ADB=\frac{1}{2}\smile AB$, o $\angle AMD=90°$, todėl $\angle CAD=90°-\frac{1}{2}\smile AB$. $\angle BCB_1=90°$, nes jis remiasi į apskritimo skersmenį, o $\angle ACB=\frac{1}{2}\smile AB$, todėl $\angle ACB_1=90°-\frac{1}{2}\smile AB$. Iš to išplaukia, kad $\angle ACB_1=\angle CAD$. Be to, trikampiai ACD ir ACB_1 turi bendrą kraštinę AC. Todėl $\triangle ACD=\triangle ACB_1$. Iš to $AB_1=CD$. Pagal Pitagoro teoremą iš trikampio $ABB_1: BB_1^2=AB^2+AB_1^2$. Vadinasi, $BB_1^2=AB^2+CD^2$, ką ir reikėjo įrodyti.

121. Per tašką M išveskime $EF \parallel AB$ (122 pav.). $\angle BAM=\angle AME$, todėl $AE=EM$. $\angle ABM=\angle BMF$, todėl $BF=FM$. Pažymėkime $\angle MAE=\alpha$, $\angle MBC=\beta$. $\angle MED_1=2\alpha$ ir $\angle MFC=2\beta$ — kaip trikampių priekampiai. $\angle BFM=180°-2\beta$. Kadangi $\angle ABC+\angle ADC=180°$ ir $\angle ABC=2\beta$, tai $\angle ADC=180°-2\beta$. Kadangi $\angle BAD+\angle BCD=180°$ ir $\angle BAD=2\alpha$, tai $\angle BCD=180°-2\alpha$. $\angle CFM=\angle MDE=2\beta$. Vadinasi, $\triangle MCF\sim\triangle MED$. Taškas M yra kampo B pusiaukampinėje, todėl jis vienodai nutolęs nuo tiesių BC ir BA. Be to, taškas M yra ir kampo A pusiaukampinėje, t. y. vienodai nutolęs nuo tiesių BA ir AD. Iš to išplaukia, kad taškas M yra vienodai nutolęs nuo tiesių BC ir AD. Tai reiškia, kad trikampiai turi lygias aukštines, išvestas iš taško M. Vadinasi, tie trikampiai lygūs (panašumo koeficientas $k=1$). Iš čia $CF=ED$, $EF=CD$. Kadangi $AE=EM$ ir $BF=FM$, tai $EF=EM+MF=AE+BF=(AD+DE)+(BC-FC)=AD+BC$. Taigi $CD=BC+AD$.

122. Kadangi $S_{tr.}=\frac{AD+BC}{2}\cdot AB$, tai pažymėjus $AD=a$, $BC=b$, turėsime $S_{tr.}=(a+b)\cdot r$ (123 pav.). Pagal apibrėžtinio keturkampio savybę $BC+AD=AB+CD$. Iš čia $CD=a+b-2r$. Kadangi $ED=AD-AE=a-b$, tai pagal Pitagoro teoremą iš trikampio $CED: CD^2=CE^2+ED^2$; $(a+b-2r)^2=(2r)^2+(a-b)^2$; $4r(a+b)=4ab$; $r=\frac{ab}{a+b}$. Iš to išplaukia, kad $S_{tr.}=(a+b)\cdot r=(a+b)\cdot\frac{ab}{a+b}=ab$, ką ir reikėjo įrodyti.



124 pav.



125 pav.

123. Atidėsime $\angle ABK = \angle CBD$ (124 pav.). $\angle BAK = \angle BDC$ kaip įbrėžtiniai ir besiremiantys į lanką BC. Vadinasi, $\triangle ABK \sim \triangle DBC$ ir todėl $\frac{AB}{AK} = \frac{BD}{DC}$; $AK = \frac{AB \cdot DC}{BD}$ (1). Toliau $\angle CBK = \angle CBD + \angle DBK$ ir $\angle ABD = \angle ABK + \angle DBK$. Vadinasi, $\angle ABD = \angle CBK$. $\angle BCA = \angle BDA$ kaip įbrėžtiniai ir besiremiantys į lanką AB. Iš to išeina, kad $\triangle BCK \sim \triangle ABD$ ir todėl $\frac{BC}{KC} = \frac{BD}{AD}$; $KC = \frac{BC \cdot AD}{BD}$ (2).

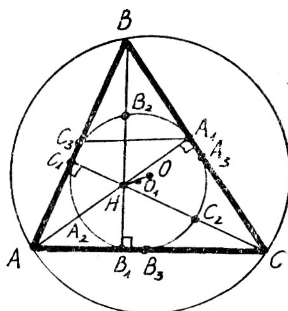
Sudėjus (1) ir (2), gauname: $AC = \frac{AB \cdot DC}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD}$; $AC \cdot BD = AB \cdot DC + BC \cdot AD$. Ptolemėjo teorema įrodyta.

124. Pagal teoremą apie besikertančias stygas: $PM \cdot MQ = BM \cdot MD$, kur PQ — apibrėžto apskritimo skersmuo, einantis per įbrėžto apskritimo centrą M (125 pav.). Jei $OP = R$, $OM = d$, $FM = r$, tai $PM = R - d$, $QM = R + d$. Todėl $PM \cdot MQ = R^2 - d^2$; $R^2 - d^2 = BM \cdot MD$ (1). Iš trikampio BMF: $\frac{FM}{BM} = \sin\left(\frac{1}{2}\angle B\right)$; $BM =$

$$= \frac{r}{\sin\left(\frac{1}{2}\angle B\right)} \quad (2).$$

Įrodysime, kad $MD = DA$. Taškas D, esantis kampo B pusiaukampinėje, dalina lanką AC pusiau, todėl $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle B$. M — trikampio ABC pusiaukampinių susikirtimo taškas. $\angle AMD = \angle MAB + \angle ABM = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$, kaip trikampio ABM priekampis. $\angle MAD = \angle MAC + \angle CAD = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$. Vadinasi, $\angle AMD = \angle MAD$ ir todėl $MD = AD$. Jei AE — apibrėžto apskritimo skersmuo, tai $\angle ADE = 90°$; $AE = 2R$ ir kampas AED, įbrėžtinis ir besiremiantis į lanką AD, lygus $^1/_2\angle B$. Todėl $AD/AE = \sin(^1/_2\angle B)$.

Vadinasi, MD= 2 R sin ($^1/_2\angle B$) (3). Įstatoma (2) ir (3) į (1): $R^2-d^2=2\ Rr$; $d^2=$ $=R^2-2\ Rr$. Eulerio formulė įrodyta.



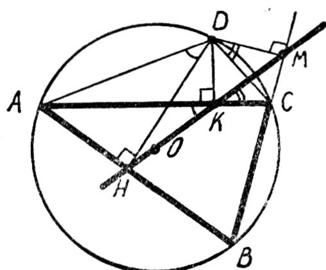
126 pav.

125. Trikampio ABC kraštinių vidurio taškai A_3, B_3, C_3 yra viename apskritime, nes jie nėra vienoje tiesėje (126 pav.). $A_1C_3=AC_3$ kaip pusiaukraštinė, išvesta iš stataus kampo viršūnės. $A_3B_3=AC_3$ kaip trikampio ABC vidurio linija. Todėl $A_3B_3=AC_3=A_1C_3$ ir $C_3B_3\|A_1A_3$. Vadinasi, $A_1A_3B_3C_3$ — lygiašonė trapecija ir apie ją galima apibrėžti apskritimą (žr. [1], 708 (b) užd.). Iš to išplaukia, kad taškas A_1 priklauso anksčiau nurodytam apskritimui. Analogiškai įrodome, kad taškai B_1 ir C_1 yra tame pačiame apskritime. Išnagrinėkime apskritimą su skersmeniu A_2A_3. $A_3B_2\|CC_1$ kaip trikampio BCH vidurio linija; $A_2B_2\|AB$ kaip trikampio ABH vidurio linija. $CC_1\perp AB$, todėl $\angle A_3B_2A_2=90°$. Vadinasi, taškas B_2 priklauso apskritimui, kurio skersmuo A_2A_3. Analogiškai įrodome, kad tam apskritimui priklauso taškai C_3, B_3 ir C_2. Kadangi tame apskritime yra taškai A_3, B_3, C_3, tai jis sutampa su apskritimu, apie kurį buvo kalbėta pradžioje. Taigi, visi 9 taškai yra viename apskritime — Eulerio apskritime.

Kadangi B_3 — AC vidurio taškas, O — apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo centras, tai $OB_3\perp AC$. Atkarpos B_1B_3 vidurio statmens dalis bus trapecijos B_1HOB_3 vidurio linija. Vidurio statmuo atkarpą OH dalija pusiau. Taškas O_1 — Eulerio apskritimo centras.

Iš tikro $\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle ABC$ (panašumo koeficientas lygus $^1/_2$). Trikampio ABC kraštinių vidurio statmenys yra trikampio $A_3B_3C_3$ aukštinės. Todėl $OB_3={}^1/_2\ BH=B_2H$. Atkarpa O_1B_2 yra trikampio HBO vidurio linija, todėl $O_1B_2={}^1/_2BO$. Jei OB=R, tai $O_1B_2={}^1/_2R$. Kadangi $OB_3=B_2H$ ir $OB_3\|B_2H$, tai OB_3HB_2 — lygiagretainis, kuriame O_1 — įstrižainių susikirtimo taškas. Todėl $B_2O_1=O_1B_3=$ $=O_1B_1$. Taigi, O_1 — Eulerio apskritimo centras, o jo spindulys lygus $^1/_2$ R.

Pastabos. 1) Eulerio apskritimą dažnai vadina šio trikampio devynių taškų apskritimu. Trikampis $A_3B_3C_3$ vadinamas trikampio ABC viduriniuoju trikampiu. Jo viršūnės diametraliai priešingos trikampio $A_2B_2C_2$ viršūnėms. Todėl kiekvienas iš šių dviejų trikampių gaunamas pasukus kitą 180° kampu apie devynių taškų apskritimo centrą. Be to, susikeičia vietomis ir šių trikampių ortocentrai (aukštinių susikirtimo taškai) H ir O (pažymėsime, kad



127 pav.

$A_2B_2 \parallel AB$, $A_2C_2 \parallel AC$, $B_2C_2 \parallel BC$). Vadinasi, devynių taškų apskritimo centras yra atkarpos HO vidurys.

2) K. Fejerbachas įrodė, kad devynių taškų apskritimas liečia įbrėžtą apskritimą ir visus išoriškai įbrėžtus apskritimus (t. y. apskritimus, liečiančius vieną trikampio kraštinę ir kitų dviejų kraštinių tęsinius).

126. Nubraižykime brėžinį taip, kaip parodyta 127 paveikslėlyje. Jei nubraižysime apskritimą, kurio skersmuo AD, tai taškai K ir H bus tame apskritime, nes $\angle DKA = \angle DHA = 90°$. Iš to išplaukia, kad $\angle ADH = \angle AKH$, kaip įbrėžtiniai ir besiremiantys į tą patį lanką. Jei imtume apskritimą, kurio skersmuo CD, tai taškai K ir M būtų tame apskritime, nes $\angle DKC = \angle DMC = 90°$. Iš to išeina, kad $\angle MKC = \angle MDC$ kaip įbrėžtiniai ir besiremiantys į tą patį lanką. Kadangi keturkampis ADCB įbrėžtinis, tai jame $\angle D + \angle B = 180°$. Vadinasi, $\angle ADC = 180° - \angle B$. Jei imtume apskritimą, kurio skersmuo BD, tai taškai H ir M būtų tame apskritime, nes $\angle DHB = \angle DMB = 90°$. Vadinasi, keturkampyje HDMB $\angle D + \angle B = 180°$, todėl $\angle HDM = 180° - \angle B$. Iš to išplaukia, kad $\angle HDM = \angle ADC$, ir todėl $\angle ADH = \angle MDC$. Bet $\angle ADH = \angle AKH$ ir $\angle MDC = \angle MKC$. Vadinasi, kampai AKH ir MKC kryžminiai ir taškas K yra tiesėje HM, Simpsono tiesėje.

Pastabos. 1) Ši tiesė vadinama Simpsono tiese škotų matematiko Roberto Simpsono (1687—1768) garbei, bet iš tiesų ją atrado anglų matematikas Viljamas Volesas 1797 m.

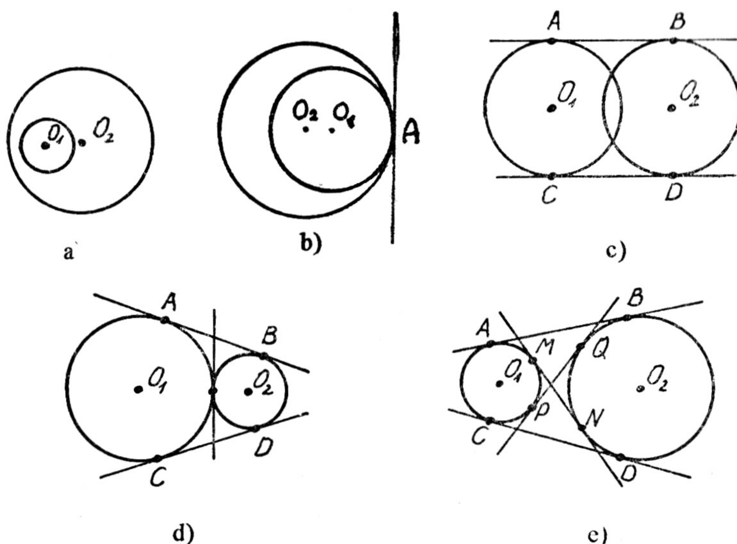
2) Taško, kuris yra apibrėžtame apskritime, Simpsono tiesė dalija pusiau atkarpą, jungiančią šį tašką su ortocentru.

3) Dviejų apibrėžto apskritimo diametraliai priešingų taškų Simpsono tiesės tarpusavyje statmenos ir susikerta devynių taškų apskritime (žr. 125 užd.).

127. Pirmiausia išsiaiškinkime, kiek sprendinių gali turėti uždavinys. 128 pav. a, b, c, d, e matyti, kad, priklausomai nuo apskritimų tarpusavio padėties, uždavinys gali neturėti sprendinio arba turėti 1, 2, 3, 4 sprendinius.

Kaip per duotąjį tašką išvesti liestinę duotajam apskritimui, žinome (žr. [1], 673 užd.).

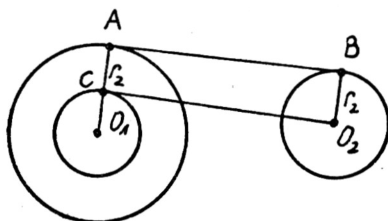
Jei apskritimai liečiasi iš išorės, tai viena iš bendrų liestinių yra statmuo, išvestas per lietimosi tašką į atkarpą, jungiančią tų apskritimų centrus.



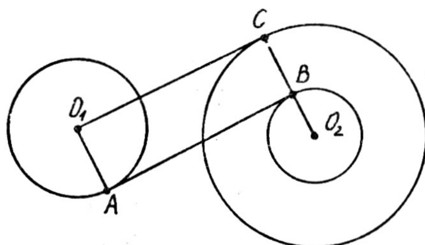
128 pav.

Nubraižykime liestines. Tegul O_1 ir r_1 — vieno apskritimo centras ir spindulys, O_2 ir r_2 — kito apskritimo centras ir spindulys ir $r_1 > r_2$. Jei AB — bendra liestinė (129 pav.), tai $O_1A \perp AB$, $O_2B \perp AB$. Išveskime $O_2C \parallel AB$. Tada $O_2C \perp O_1C$ ir O_2C — apskritimo, kurio spindulys $O_1C = O_1A - AC = r_1 - r_2$, liestinė. Iš to išplaukia, kad liestinę galima nubrėžti taip: iš centro O_1 brėžiame apskritimą, kurio spindulys $r_1 - r_2$. Per tašką O_2 išvedame liestinę O_2C tam apskritimui (bendru atveju jų bus dvi). Akivaizdu, kad AB — bendra liestinė. Antra liestinė braižoma lygiai taip pat.

Tegul duotieji apskritimai nesikerta (130 pav.). Jei AB — jų bendra liestinė, išvesime $O_1C \parallel AB$. Tada $O_1C \perp O_2C$ ir O_1C — apskritimo, kurio spindulys $O_2C = O_2B + BC = r_1 + r_2$ ir centras O_2, liestinė. Vadinasi, liestines galima braižyti taip: iš centro O_2 spin-



129 pav.



130 pav.

131 pav.

132 pav.

duliu r_1+r_2 nubrėžiame apskritimą; per tašką O_1 išvedame jam liestinę O_1C (bendru atveju jų bus dvi); išvedame $O_1A \parallel O_2C$ ir per tašką A išvedame $AB \parallel O_1C$. Akivaizdu, kad nubrėžta tiesė bus duotųjų apskritimų bendra liestinė.

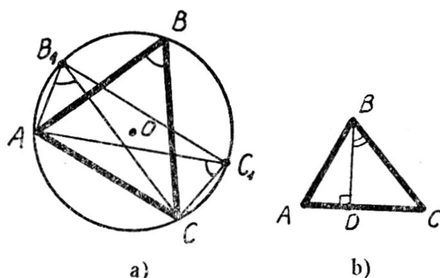
128. Tarkime, kad uždavinys jau išspręstas ir p — ieškomoji tiesė. Jei nubrėžtume apskritimą, kurio centras M ir spindulys MN lygus P_2Q_2, tai jis lies tiesę p taške N (131 pav.). Ta tiesė p taip pat lies apskritimą, kurio centras O ir spindulys lygus atstumui nuo O iki stygos AB lygios P_1Q_1.

Braižome taip: duotajame apskritime, kurio centras O, braižome stygą $A_1B_1=P_1Q_1$, dalinome ją pusiau (C_1) ir brėžiame apskritimą, kurio spindulys OC_1; iš taško M brėžiame apskritimą su spinduliu $MN=P_2Q_2$; ankstesniajame uždavinyje išnagrinėtais būdais išvedame bendras liestines nubraižytiems apskritimams (jų gali būti ne daugiau kaip keturios). Šios liestinės ir bus ieškomosios tiesės. Įrodymas akivaizdus. Siūloma savarankiškai išnagrinėti sprendinio priklausomybę nuo taško M padėties ir atkarpų P_1Q_1 ir P_2Q_2 ilgių.

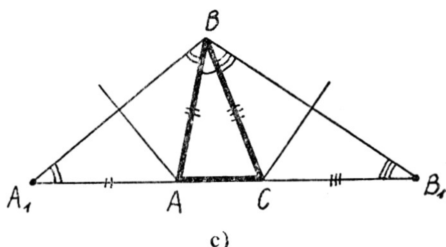
129. Tarkime, kad dvi stygos AB ir CD eina per tašką M (132 pav.) ir $OM \perp AB$. Jei $ON \perp CD$, tai $AM=MB$ ir $CN=ND$. Iš trikampio OMB pagal Pitagoro teoremą: $MB=\sqrt{R^2-OM^2}$, o iš trikampio OND : $ND=\sqrt{R^2-ON^2}$, kur R — duotojo apskritimo spindulys. Iš trikampio ONM : $ON<OM$. Vadinasi, $ND>MD$, t. y. $CD>AB$. Taigi, iš visų stygų, einančių per tašką M, mažesnė bus ta, kuri statmena spinduliui, einančiam per tašką M. Iš čia ir šios stygos braižymo būdas.

130. a) Braižome kampą ABC, lygų duotajam kampui, ir atkarpą AC, lygią duotajai kraštinei (133 pav., a, b). Du trikam-

pio ABC elementai — kraštinė ir kampas — tenkina uždavinio sąlygą. Apibrėšime apie šį trikampį apskritimą ir išvesime tiesę B_1C_1, lygiagrečią AC ir nutolusią nuo jos atstumu, lygiu ieškomojo trikampio aukštinei. Taškus B_1 ir C_1 sujungsime su A ir C. Kadangi kampai AB_1C ir AC_1C remiasi į tą patį lanką kaip ir kampas ABC, tai visi jie tarpusavyje lygūs. Trikampiai AB_1C ir AC_1C tenkina uždavinio sąlygą ($\triangle AB_1C = \triangle AC_1C$).



Iš visų trikampių ABC su pagrindu AC ir kampu B prie viršūnės didžiausią aukštinę turės tas trikampis, kuriam teisinga lygybė AB = BC.



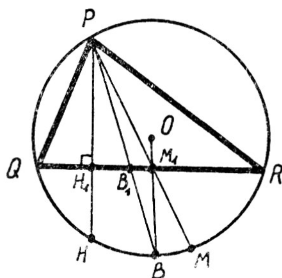
133 pav.

Jei AC = a, BD = h, $\angle ABC = \alpha$, tai $BD = \frac{DC}{\operatorname{tg}(\angle DBC)}$; $h = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

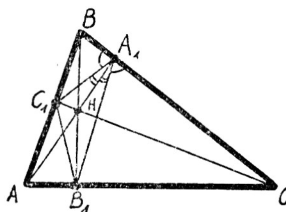
Kai $h \leqslant \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, uždavinys turi vieną sprendinį, o kai $h > \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$ — nei vieno sprendinio.

b) Jei ABC — ieškomasis trikampis, kuriame $AB + BC + AC = P$, $\angle ABC = \alpha$ — duotasis kampas, aukštinė, išvesta iš viršūnės B, lygi h, tai nubraižysime, kaip parodyta 133, c paveikslėlyje, $AA_1 = AB$, $CB_1 = CB$. Pagal trikampio priekampio savybę $\angle A_1BA = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle B_1BC = \frac{1}{2}\angle C$, kur A ir C — trikampio ABC kampai. Tada $\angle A_1BB_1 = \angle A_1BA + \angle ABC + \angle CBB_1 = \frac{1}{2}\angle A + \angle B + \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) + \frac{1}{2}\angle B = 90° + \frac{1}{2}\angle B$.

Atsižvelgiant į tai, kas buvo išnagrinėta ankstesniajame uždavinyje, nubraižysime trikampį A_1BB_1 pagal kampą prie viršūnės $90° + \frac{1}{2}\angle B$ ir pagrindą $A_1B_1 = P$ su aukštine h (tokių trikampių gali būti vienas arba nei vieno). Kraštinėms A_1B ir B_1B išvesime vidurio statmenis iki jų susikirtimo su pagrindu A_1B_1 taškuose A ir C. Trikampis ABC — ieškomasis.



134 pav.



135 pav.

131. Sujunkime taškus B ir O (134 pav.). Kadangi PB — kampo P pusiaukampinė, tai $\smile QB = \smile BR$ ir OB — vidurio statmuo, išvestas į QR, $QM_1 = M_1R$. Todėl pusiaukraštinė PM eina per tašką M_1. Kadangi $PH \perp QR$, tai $PH \parallel OB$ ir galime surasti tašką P. Sujungus P su M, surasime tašką M_1. Išvedę $QR \perp OB$ per tašką M_1, surasime taškus Q ir R. Sujungus tuos taškus su tašku P, gausime trikampį PQR, kuriame PH_1 — aukštinė, PB_1 — pusiaukampinė, PM_1 — pusiaukraštinė. Įrodymas, kad trikampis PQR tenkina uždavinio sąlygą, akivaizdus.

Anksčiau buvo įrodyta (26 užd.), kad pusiaukampinės pagrindas yra tarp aukštinės ir pusiaukraštinės pagrindų.

Todėl uždavinys turi sprendinį esant ne bet kokiam taškų H, B, M išsidėstymui apskritime.

Jei taškai H ir M yra viename pusapskritimyje tiesės BO atžvilgiu, tai uždavinys sprendinio neturi, kadangi PM ir BO susikirs taške, esančiame apskritimo išorėje.

Jei taškai H ir M yra skirtinguose pusapskritimiuose tiesės BO atžvilgiu, tai uždavinys turi vienintelį sprendinį.

Jei taškai M, P, H sutampa (lygiakraščio trikampio atvejis), tai uždavinys turi be galo daug sprendinių ir brėžimas šiuo atveju akivaizdus.

Pastaba. Uždavinio sąlygoje apskritimas gali būti neduotas: jį galima nubrėžti per tris duotuosius taškus.

132. Trikampio ABC aukštinės AA_1, BB_1, CC_1 dalina trikampio $A_1B_1C_1$ kampus pusiau (135 pav.). Iš tikro: $\triangle A_1B_1C \sim \triangle ABC$, nes jie turi bendrą kampą C ir $\frac{A_1C}{AC} = \frac{B_1C}{BC} = \cos C$. Analogiškai įrodome, kad $\triangle A_1C_1B \sim \triangle ABC$. Vadinasi, $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1 = \angle A$, ir kadangi $\angle BA_1A = \angle CA_1A = 90°$, tai $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$, t. y. AA_1 dalina trikampio $A_1B_1C_1$ kampą $C_1A_1B_1$ pusiau. Toks nagrinėjimas gali būti pakartotas ir aukštinėms BB_1 bei CC_1.

Iš čia braižymo būdas: pagal duotus taškus braižome trikampį $A_1B_1C_1$; apibrėžiame apie jį apskritimą; braižome kampų A_1, B_1,

C_1 pusiaukampines; per taškus A_1, B_1, C_1 išvedame apskritimo liestines, kurios kertasi poromis taškuose A, B, C.

Kadangi duotieji taškai nėra vienoje tiesėje, tai visada galima nubrėžti tik vieną trikampį $A_1B_1C_1$. Visas tolesnis brėžimas taip pat atliekamas vienareikšmiškai. Ieškomojo trikampio aukštinės yra tose pačiose tiesėse, kuriose yra trikampio $A_1B_1C_1$ pusiaukampinės. Iš to išeina, kad taškų A_1, B_1, C_1 padėtis apsprendžia taško H — trikampio $A_1B_1C_1$ pusiaukampinių susikirtimo taško — padėtį.

Taigi, atlikti brėžiniai vienareikšmiškai apsprendžia taškų A, B, C, H padėtį. Uždavinio sprendinių skaičius ne didesnis už trijų taškų išsirinkimo iš keturių būdų skaičių, t. y. ne daugiau keturių.

Uždavinys turi keturis sprendinius: sąlygą tenkina trikampiai ABC, ABH, ACH, BCH.

Pastabos. 1) Apie trikampį apibrėžto apskritimo liestinės, išvestos per to trikampio viršūnes, kerta tieses, kuriose yra priešingos toms viršūnėms trikampio kraštinės, taškuose, esančiuose vienoje tiesėje.

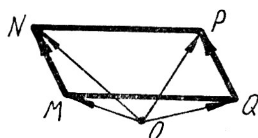
2) Sprendime gauti trikampiai ABC, ABH, ACH, BCH turi bendrą devynių taškų apskritimą (žr. 125 užd.).

3) Trikampių ABC, ABH, ACH, BCH Eulerio tiesės kertasi viename taške.

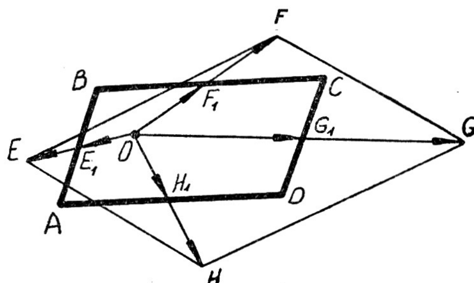
4) Apie trikampius ABC, ABH, ACH, BCH apibrėžtų apskritimų centrai sudaro keturkampį, simetrišką keturkampiui HABC (simetrijos centras yra šių trikampių devynių taškų apskritimo centras).

133. Kadangi $\vec{ON}-\vec{OM}=\vec{MN}$ ir $\vec{OP}-\vec{OQ}=\vec{QP}$, tai $\vec{MN}=\vec{QP}$ (136 pav.). Iš to išplaukia, kad šie vektoriai vienakrypčiai ir jų ilgiai lygūs. MNPQ — lygiagretainis pagal pirmąjį lygiagretainio požymį.

134. E_1, F_1, G_1, H_1 — keturkampio ABCD kraštinių vidurio taškai (137 pav.). Kadangi $\vec{OE}=2\,\vec{OE_1}$ ir $\vec{OE_1}=\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})$, tai $\vec{OE}=$



136 pav.



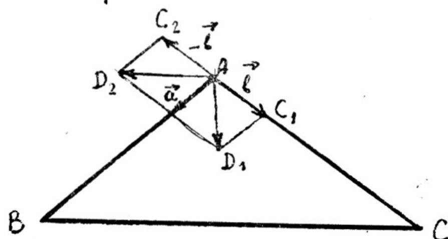
137 pav.

$=\vec{OA}+\vec{OB}$. Analogiškai $\vec{OF}=2\cdot\vec{OF_1}=\vec{OB}+\vec{OC}$; $\vec{OG}=2\vec{OG_1}=\vec{OC}+\vec{OD}$; $\vec{OH}=2\cdot\vec{OH_1}=\vec{OD}+\vec{OA}$. Kadangi $\vec{HE}=\vec{OE}-\vec{OH}=\vec{OA}+\vec{OB}-\vec{OD}-\vec{OA}=\vec{OB}-\vec{OD}=\vec{DB}$ ir $\vec{GF}=\vec{OF}-\vec{OG}=\vec{OB}+\vec{OC}-\vec{OC}-\vec{OD}=\vec{OB}-\vec{OD}=\vec{DB}$, tai $\vec{HE}=\vec{GF}$ ir pagal ankstesnįjį uždavinį EFGH — lygiagretainis.

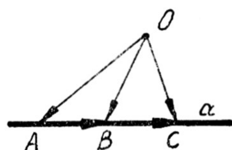
135. Vektorius $\vec{a}=\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}=\frac{1}{|\vec{AB}|}\vec{AB}$ yra vienakryptis su vektoriumi $\vec{AB}$ ir jo ilgis lygus vienam, nes $|\vec{a}|=\frac{1}{|\vec{AB}|}\cdot|\vec{AB}|=1$. Vektorius $\vec{b}=\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ vienakryptis su vektoriumi $\vec{AC}$ ir taip pat jo ilgis lygus vienam (138 pav.). Pagal lygiagretainio taisyklę $\vec{a}+\vec{b}=\vec{AD_1}$ ir kadangi $AB_1=AC_1$, tai $AB_1D_1C_1$ — rombas. Todėl AD_1 — kampo A pusiaukampinė. Vadinasi, vektorius $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}+\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ nukreiptas išilgai kampo A pusiaukampinės. Kadangi $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, tai $\vec{a}-\vec{b}=\vec{AD_2}$ ir $AB_1D_2C_2$ — rombas, vektorius $\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}-\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|}$ nukreiptas išilgai priekampio, kurio viršūnė A, pusiaukampinės.

136. 1) Sakykime, kad taškai A, B, C yra vienoje tiesėje a (139 pav.). Tada vektoriai $\vec{AB}$ ir $\vec{AC}$ kolinearūs, $\vec{AB}=n\cdot\vec{AC}$. Bet $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$, $\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}$. Vadinasi, $\vec{OB}-\vec{OA}=n\cdot(\vec{OC}-\vec{OA})$; $(n-1)\cdot\vec{OA}+\vec{OB}-n\cdot\vec{OC}=\vec{0}$. Pažymėkime $n-1=k$, $m=-n$, $l=1$. Tada: jei taškai A, B, C priklauso vienai tiesei, tai bet kuriam taškui O galioja lygybė: $k\cdot\vec{OA}+l\cdot\vec{OB}+m\cdot\vec{OC}=\vec{0}$, kur $k+l+m=(n-1)+1+(-n)=0$.

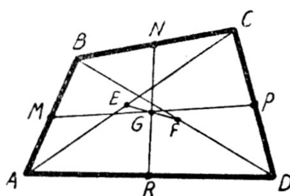
2) Tegul dabar $k\cdot\vec{OA}+l\cdot\vec{OB}+m\cdot\vec{OC}=\vec{0}$ ir $k+l+m=0$. Įrodysime, kad taškai A, B, C priklauso vienai tiesei.



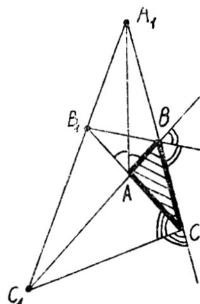
138 pav.



139 pav.



140 pav.



141 pav.

Kadangi tarp skaičių k, l, m yra nelygių nuliui, tai imame $m=-1$. Tada $k\cdot\overrightarrow{OA}+l\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=0$ ir $k+l=1$. Iš čia $\overrightarrow{OC}=$ $=k\cdot\overrightarrow{OA}+l\cdot\overrightarrow{OB}$ ir $l=1-k$. Todėl $\overrightarrow{OC}=k\cdot\overrightarrow{OA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OB}=$ $=k\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-k\cdot\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$; $\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{BA}$. Vektoriai $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{BA}$ kolinearūs ir kadangi jie atidėti iš vieno ir to paties taško B, tai jie yra vienoje tiesėje. Todėl ir taškai A, B, C yra vienoje tiesėje.

137. MNPR — lygiagretainis (MN ir PR lygiagrečios AC ir lygios pusei AC), todėl $MG=GP$, $NG=GR$ (140 pav.). Kadangi E yra vidurio taškas įstrižainės AC, G — atkarpos MP vidurio taškas, F — įstrižainės BD vidurio taškas, tai $\overrightarrow{OE}={}^1/_2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$; $\overrightarrow{OG}={}^1/_2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OP})={}^1/_2({}^1/_2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}))+{}^1/_2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})={}^1/_4(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+$ $+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$; $\overrightarrow{OF}={}^1/_2(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$, kur O — bet kuris taškas.

Taigi, sudarysime sumą $k\cdot\overrightarrow{OE}+l\cdot\overrightarrow{OG}+m\cdot\overrightarrow{OF}={}^1/_2k(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})+$ $+{}^1/_4l(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+{}^1/_2m(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=({}^1/_2k+{}^1/_4l)\cdot\overrightarrow{OA}+$ $+({}^1/_4l+{}^1/_2m)\cdot\overrightarrow{OB}+({}^1/_2k+{}^1/_4l)\overrightarrow{OC}+({}^1/_4l+{}^1/_2m)\cdot\overrightarrow{OD}$, kur k, l, m — bet kokie skaičiai. Jei imtume $k=-{}^1/_2$, $l=1$, $m=-{}^1/_2$, tai $k+m+$ $+l=0$ ir $k\cdot\overrightarrow{OE}+l\cdot\overrightarrow{OG}+m\cdot\overrightarrow{OF}=0$. Pagal ankstesnįjį uždavinį taškai E, G, F yra vienoje tiesėje.

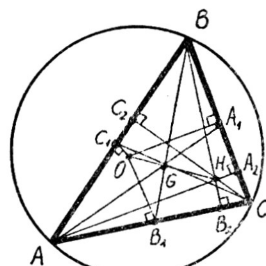
138. Pagal trikampio priekampio pusiaukampinės savybę (141 pav.) (žr. [1], 619 užd.):
kampui A: $\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{AB}{AC}$; $\overrightarrow{BA_1}=\frac{AB}{AC}\cdot\overrightarrow{CA_1}$ ir kadangi $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+$ $+\overrightarrow{BA_1}$, tai $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}+\frac{AB}{AC}\cdot\overrightarrow{CA_1}$;

kampui B: $\frac{AB_1}{CB_1}=\frac{AB}{BC}$; $\vec{AB_1}=\frac{AB}{BC}\cdot\vec{CB_1}$;

kampui C: $\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{AC}{BC}$; $\vec{AC_1}=\frac{AC}{BC}\cdot\vec{BC_1}$.

Taškai A_1, B_1, C_1 bus vienoje tiesėje, jei egzistuoja skaičiai k, l, m, visi kartu nelygūs nuliui, tokie, kad bet kokiam taškui O tenkinama lygybė $k\cdot\vec{OA_1}+l\cdot\vec{OB_1}+m\cdot\vec{OC_1}=\vec{0}$ (žr. 136 užd.). Imkime tašką A. Tada $k\cdot\vec{AA_1}+l\cdot\vec{AB_1}+m\cdot\vec{AC_1}=k\left(\vec{AB}+\frac{AB}{AC}\vec{CA_1}\right)+$ $+l\frac{AB}{BC}\cdot\vec{CB_1}+m\frac{AC}{BC}\cdot\vec{BC_1}$. Visada rasime tokius skaičius α, β, γ, kad $\vec{CA_1}=\alpha\cdot\vec{BC}$, $\vec{CB_1}=\beta\cdot\vec{CA}$, $\vec{BC_1}=\gamma\cdot\vec{BA}$. Todėl $k\cdot\vec{AA_1}+l\cdot\vec{AB_1}+$ $+m\cdot\vec{AC_1}=k\cdot\vec{AB}+k\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\alpha\cdot\vec{BC}+l\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\beta\cdot\vec{CA}+m\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\gamma\cdot\vec{BA}=$ $=(k-m\frac{AC}{BC}\cdot\gamma)\cdot\vec{AB}+k\cdot\frac{AB}{AC}\cdot\alpha\cdot\vec{BC}+l\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\beta\cdot\vec{CA}$.

Pavyzdžiui, paėmę $k=-2$, $l=1$, $m=1$, $\alpha=\frac{2AC}{AB}$, $\beta=-\frac{4BC}{AB}$, $\gamma=\frac{2BC}{AC}$, gauname: $k+l+m=0$, $k\cdot\vec{AA_1}+l\cdot\vec{AB_1}+m\cdot\vec{AC_1}=(-2-$ $-2)\cdot\vec{AB}+(-4)\cdot\vec{BC}+(-4)\cdot\vec{CA}=-4(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})=-4\cdot\vec{0}=\vec{0}$.



142 pav.

Vadinasi, taškai A_1, B_1, C_1 yra vienoje tiesėje.

139. Sakykime, G yra trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taškas, H — aukštinių susikirtimo taškas, O — apibrėžto apskritimo centras, A_1, B_1, C_1 — pusiaukraštinių pagrindai, A_2, B_2, C_2 — trikampio ABC aukštinių pagrindai (142 pav.).

Pasinaudoję trikampio pusiaukraštinių savybėmis ir vektorių kolinearumu, gauname lygybes: $\vec{GA}=-2\vec{GA_1}$, $\vec{GB}=-2\vec{GB_1}$, $\vec{GC}=-2\vec{GC_1}$. Išvesime vidurio statmenis OA_1, OB_1, OC_1. Kadangi taškas G yra pusiaukraštinių susikirtimo taškas, tai $\vec{GA}+\vec{GB}=$ $=-\vec{GC}$ arba iš čia $\vec{GA_1}+\vec{GB_1}+\vec{GC_1}=\vec{0}$. Iš kitos pusės, $\vec{GA_1}=$ $=\vec{GO}+\vec{OA_1}$, $\vec{GB_1}=\vec{GO}+\vec{OB_1}$, $\vec{GC_1}=\vec{GO}+\vec{OC_1}$. Sudėkime tas tris lygybes: $\vec{0}=3\cdot\vec{GO}+(\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1})$. Iš čia $\vec{GO}=-{}^1/_3(\vec{OA_1}+$ $+\vec{OB_1}+\vec{OC_1})$ (1). Kadangi $\vec{GA}=\vec{GH}+\vec{HA}$, $\vec{GB}=\vec{GH}+\vec{HB}$, $\vec{GC}=$

$=\vec{GH}+\vec{HC}$, tai, sudėję šias tris lygybes, gausime: $\vec{0}=3\vec{GH}+$ $+\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC}$. Iš čia $\vec{GH}=-{}^1/_3(\vec{HA}+\vec{HB}+\vec{HC})$ (2).

Trikampio $A_1B_1C_1$ kraštinės yra trikampio ABC vidurinės linijos (toks trikampis vadinamas viduriniuoju), todėl $\triangle ABC\sim$ $\sim\triangle A_1B_1C_1$. Kadangi $A_1C_1={}^1/_2AC$, tai bet kurių dviejų atitinkamų atkarpų ilgių santykis bus lygus 1 : 2. H — trikampio ABC ortocentras, O — trikampio $A_1B_1C_1$ ortocentras, todėl $HA=2\cdot OA_1$, $HB=2\cdot OB_1$, $HC=2\cdot OC_1$. Vadinasi, $\vec{HA}=-2\cdot\vec{OA}$, $\vec{HB}=-2\cdot\vec{OB_1}$, $\vec{HC}=-2\cdot\vec{OC_1}$. Įstatysime šias reikšmes į (2) lygybę: $\vec{GH}=$ $={}^2/_3(\vec{OA_1}+\vec{OB_1}+\vec{OC_1})$.

Atsižvelgdami į (1) lygybę, gauname: $\vec{GH}={}^2/_3(-3\cdot\vec{GO})=$ $=-2\cdot\vec{GO}$. Iš to išeina, kad taškai O, H ir G yra vienoje tiesėje ir $GH=2\cdot GO$.

Pastabos. 1) Trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškas G vadinamas to trikampio centroidu. Trikampis $A_2B_2C_2$, kur A_2, B_2, C_2 — trikampio ABC aukštinių pagrindai, vadinamas trikampio ABC ortotrikampiu.

Smailiojo trikampio ortocentras yra ir apskritimo, įbrėžto į jo ortotrikampį, centras.

2) Keturkampis $BA_1B_1C_1$ yra lygiagretainis, todėl BB_1 dalija A_1C_1 pusiau. Vadinasi, trikampio $A_1B_1C_1$ pusiaukraštinės yra trikampio ABC pusiaukraštinėse ir abu trikampiai turi vieną ir tą patį centroidą G.

3) Apskritimo, apibrėžto apie vidurinįjį trikampį, spindulys lygus pusei apskritimo, apibrėžto apie pradinį trikampį, spindulio.

4) Tiesė, kurioje yra ortocentras, centroidas ir apie bet kokį trikampį apibrėžto apskritimo centras, vadinama to trikampio Eulerio tiese.

140. Pasirinksime vektorius $\vec{BC}$ ir $\vec{AD}$. Jų koordinatės $\vec{BC}\{x_3-$ $-x_2;\ y_3-y_2\}$, $\vec{AD}\{x_4-x_1;\ y_4-y_1\}$.

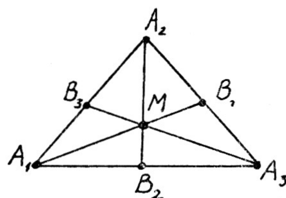
1) Jei ABCD — lygiagretainis, tai $\vec{BC}=\vec{AD}$. Iš čia $x_3-x_2=$ $=x_4-x_1$, $x_1+x_3=x_2+x_4$ ir $y_3-y_2=y_4-y_1$, $y_1+y_3=y_2+y_4$. (1).

2) Sakykime, kad lygybės (1) tenkinamos. Tada $x_3-x_2=x_4-x_1$ ir $y_3-y_2=y_4-y_1$ (2).

Vektorių $\vec{BC}$—$\vec{AD}$ skirtumas bus vektorius, kurio koordinatės lygios $\{(x_3-x_2)$ — $(x_4-x_1);\ (y_3—y_2)$ — $(y_4-y_1)\}$, t. y. $\{0;\ 0\}$.



143 pav.



144 pav.

Todėl $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=0$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Iš čia $BC=AD$ ir $BC\|AD$, t. y. ABCD — lygiagretainis.

141. Kadangi $AC:CB=\lambda$, tai $\overrightarrow{AC}=\lambda\cdot\overrightarrow{CB}$ (1) (143 pav.). Taško C koordinates pažymėkime $(x_0;\ y_0)$. Tada $\overrightarrow{AC}\{x_0-x_1;\ y_0-y_1\}$, $\overrightarrow{CB}\{x_2-x_0;\ y_2-y_0\}$. Vektoriaus $\lambda\cdot\overrightarrow{CB}$ koordinatės bus $\{\lambda(x_2-x_0);\ \lambda(y_2-y_0)\}$. Iš (1) lygybės gauname: $x_0-x_1=\lambda(x_2-x_0)$ ir $y_0-y_1=$ $=\lambda(y_2-y_0)$; $x_0=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y_0=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

142. $B_1(x_4;\ y_4)$, $B_2(x_5;\ y_5)$, $B_3(x_6;\ y_6)$ — trikampio kraštinių vidurio taškai (144 pav.), todėl jų koordinatės lygios:
$x_4=\frac{x_2+x_3}{2}$; $y_4=\frac{y_2+y_3}{2}$; $x_5=\frac{x_1+x_3}{2}$; $y_5=\frac{y_1+y_3}{2}$; $x_6=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y_6=\frac{y_1+y_2}{2}$. Pusiaukraštinių susikirtimo taškas $M(x_0;\ y_0)$ dalina kiekvieną pusiaukraštinę santykiu 2 : 1, imant nuo viršūnės. Pasinaudosime ankstesniojo uždavinio rezultatais: $A_1M:MB_1=2$;

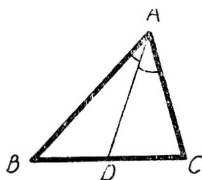
$$x_0=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y_0=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Taško M koordinatės: $M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$.

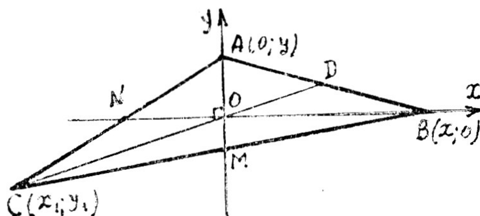
Pastaba. Įsitikinkite, kad rezultatai nesikeis, jei paimsite ne taškų A_1 ir B_1 porą, o kitas taškų poras: A_2 ir B_2, A_3 ir B_3.

143. Kadangi AD — pusiaukampinė (145 pav.), tai $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Kraštinių AB ir AC ilgius rasime pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę: $AB=\sqrt{(0+3)^2+(4-0)^2}=5$; $AC=\sqrt{(3+3)^2+(0-0)^2}=6$. Gauname $\frac{BD}{DC}=\frac{5}{6}$. Panaudoję 141 uždavinio rezultatus, randame taško D $(x_0;\ y_0)$ koordinates:

$$x_0=\frac{0+\frac{5}{6}\cdot 3}{1+\frac{5}{6}}=\frac{15}{11};\quad y_0=\frac{4+\frac{5}{6}\cdot 0}{1+\frac{5}{6}}=\frac{24}{11}.$$



145 pav.



146 pav.

144. Nubraižome koordinačių sistemą, kaip parodyta 146 paveikslėlyje. Tada taškų A, B ir C koordinatės bus A(0; y), B(x; 0), C(x_1; y_1). Kadangi taškas D yra AB vidurio taškas, tai jo koordinatės $D\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right)$. Kadangi AC=9, tai $9=\sqrt{x_1^2+(y_1-y)^2}$ (1)

BC=12, todėl $12=\sqrt{(x_1-x)^2+y_1^2}$ (2)

$\frac{CO}{OD}=2$. Taigi (žr. 141 užd.)

$$0=\frac{x_1+2\cdot\frac{x}{2}}{3};\ x_1=-x;\ 0=\frac{y_1+2\cdot\frac{y}{2}}{3};\ y_1=-y.$$

Šias reikšmes įstatykime į (1) ir (2) lygybes: $81=x^2+4y^2$; $144=4x^2+y^2$. Sudėkime šias lygybes: $225=5x^2+5y^2$; $x^2+y^2=45$ ir kadangi $AB=\sqrt{x^2+y^2}$, tai $AB=3\sqrt{5}$ cm.

145. Iš pradžių rasime masių m_1 ir m_3 sunkio centro koordinates (147 pav.). Pagal Archimedo sverto taisyklę $m_1\cdot A_1A_4=$ $=m_3\cdot A_4A_3$, kur A_4 — masių m_1 ir m_3 sunkio centras. $\frac{A_1A_4}{A_4A_3}=\frac{m_3}{m_1}$.

Taško A_4 koordinačių (x_4; y_4) radimui naudosimės 141 uždavinio rezultatais:

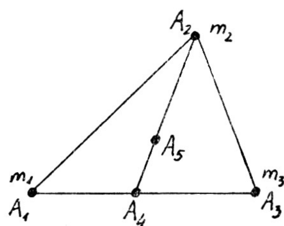
$$x_4=\frac{x_1+\frac{m_3}{m_1}\cdot x_3}{1+\frac{m_3}{m_2}}=\frac{m_1x_1+m_3x_3}{m_1+m_3};\quad y_4=\frac{y_1+\frac{m_3}{m_1}y_3}{1+\frac{m_3}{m_1}}=\frac{m_1y_1+m_3y_3}{m_1+m_3}.$$

Taškus A_1 ir A_3 pakeisime tašku A_4, suteikiant jam masę m_1+ $+m_3$. Trijų masių sunkio suradimą mes pervedėm į dviejų masių — m_2 ir m_1+m_3 — sunkio centro suradimą.

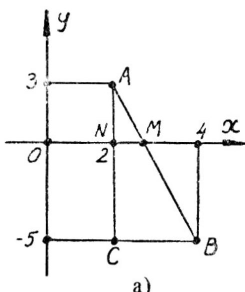
Sakykime, $A_5(x_5; y_5)$ — ieškomasis sunkio centras. Pagal sverto taisyklę:

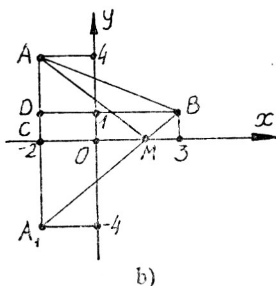
$m_2\cdot A_2A_5=(m_1+m_3)A_5A_4$; $A_2A_5=\frac{m_1+m_3}{m_2}A_5A_4$. Panaudoję 141 uždavinio rezultatus, randame:

$$x_5=\frac{x_2+\frac{m_1+m_3}{m_2}\cdot x_4}{1+\frac{m_1+m_3}{m_2}}=\frac{m_2x_2+(m_1+m_3)\cdot x_4}{m_1+m_2+m_3}=$$



147 pav.





148 pav.

$$=\frac{m_2x_2+(m_1+m_3)\cdot\frac{m_1x_1+m_3x_3}{m_1+m_3}}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}.$$ Analogiškai $y_5=$ $=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$. Taigi trijų masių sunkio centro koordinatės $\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3};\ \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$.

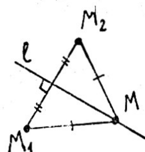
146. a) Suma $MA+MB$ bus mažiausia tada, kai taškas M yra atkarpoje AB (įrodykite tai). Taško M koordinatės yra $(x;\ 0)$, nes taškas M yra OX ašyje (148 pav., a). $BC=4-2=2$; $AC=8$; $AN=3$. $\triangle ABC\sim\triangle ANM$, todėl $\frac{NM}{BC}=\frac{AN}{AC}$; $NM=\frac{3}{4}$. Vadinasi, $x=$ $=OM=ON+NM=2+\frac{3}{4}=2\frac{3}{4}$; $M\left(2\frac{3}{4};\ 0\right)$.

b) Atidėsime tašką A_1, simetrišką taškui A ašies OX atžvilgiu (148 pav., b). Kadangi $AM=A_1M$, tai suma $AM+MB$ bus mažiausia tada, kai ir suma A_1M+MB bus mažiausia. Pastaroji bus mažiausia, kai taškas M priklausys atkarpai A_1B. $\triangle A_1DB\sim$ $\sim\triangle A_1CM$, todėl $\frac{MC}{BD}=\frac{A_1C}{A_1D}$; $MC=4$. Vadinasi, $OM=CM-CO=2$; $M(2;\ 0)$.

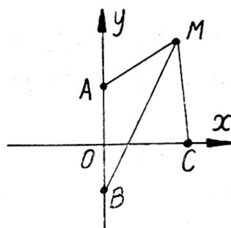
147. a) Tegul $M_0(x_0;\ y_0)$ — taškas, esantis tiesėje, aprašytoje duotąja lygtimi. Parašysime atkarpos M_1M_2, kur $M_1(x_0-A;\ y_0-B)$, $M_2(x_0+A;\ y_0+B)$, vidurio statmens lygtį. Tegul taškas $M(x;\ y)$ yra tame statmenyje l (149 pav.). Tada $MM_1=MM_2$, $MM_1^2=MM_2^2$. Bet $MM_1^2=(x_0-A-x)^2+(y_0-B-y)^2$; $MM_2^2=(x_0+A-x)^2+$ $+(y_0+B-y)^2$. Vadinasi, $(x_0-A-x)^2+(y_0-B-y)^2=(x_0+A-x)^2+$ $+(y_0+B-y)^2$. Pertvarkysime šią lygtį: $(x_0-A-x)^2-(x_0+A-$ $-x)^2=(y_0+B-y)^2-(y_0-B-y)^2$;

$(x_0-A-x+x_0+A-x)\cdot(x_0-A-x-x_0-A+x)=(y_0+B-y+y_0-$ $-B-y)\cdot(y_0+B-y-y_0+B+y)$;

$Ax+By=Ax_0+By_0$. Pažymėsime $Ax_0+By_0=-C$. Tada $Ax+$ $+By+C=0$ — tiesės lygtis pasirinktoje koordinačių sistemoje. Pastebėsime, kad A ir B nėra lygūs 0 vienu metu, nes, jei $A=B=0$, tai $M_1=M_2$ ir atkarpa, kuriai išvedamas vidurio statmuo, neegzistuoja.



149 pav.



150 pav.

b) Kadangi stačiakampėje koordinačių sistemoje apskritimo su spinduliu r ir centru taške $O(x_0;\ y_0)$ lygtis turi tokį pavidalą: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$, tai ji neturi nario, į kurį įeina x ir y sandauga. O kadangi duotoji lygtis turi narį xy, tai ji negali būti apskritimo lygtimi.

Duotoji lygtis taip pat neturi nario y^2, kuris turi būti apskritimo lygtyje, kas rodo, kad duotoji lygtis nėra apskritimo lygtis.

Pastebėsime, kad duotąją lygtį galima užrašyti taip: $y=x-$ $-\frac{2}{x}$ $(x\neq 0)$. Jos apibrėžimo ir reikšmių sritys neribotos. Tai dar vienas patvirtinimas, kad tai — ne apskritimo lygtis.

148. Kadangi $(x-1)^2+(y-2)^2=4$; $x^2+y^2-2x-4y=-1$ ir $x^2+y^2=1$, tai $x=1-2y$. Vadinasi, $(1-2y-1)^2+(y-2)^2=4$; $y\cdot(5y-4)=0$. Iš čia $y_1=0$; $y_2=4/5$ ir $x_1=1$. $x_2=-3/5$. Taigi, apskritimų susikirtimo taškų koordinatės A (1; 0), $B\left(-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$, jų bendros stygos ilgis $AB=\sqrt{\left(1+\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

149. a) Tegul $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Pasirinkime koordinačių sistemą, kaip parodyta 150 paveikslėlyje (taškas C gali būti tiesėje AB). Taškų koordinatės: $A(0;\ y_1)$. $B(0;\ y_2)$, $C(x_1;\ 0)$. Tarkime, kad taškas $M(x;\ y)$ priklauso ieškomajai aibei. Tada $AM^2=x^2+(y-y_1)^2$; $BM^2=x^2+(y-y_2)^2$; $CM^2=(x-x_1)^2+y^2$; $\alpha\cdot AM^2+\beta\cdot BM^2+\gamma\cdot CM^2=$ $=\alpha x^2+\alpha(y-y_1)^2+\beta x^2+\beta\cdot(y-y_2)^2+\gamma(x-x_1)^2+\gamma y^2=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot$

$$\left(x^2-2\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot x+y^2-2\frac{\alpha y_1+\beta y_2}{\alpha+\beta+\gamma}\cdot y+\frac{\alpha y_1^2+\beta y_2^2+\gamma x_1^2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(x-\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha y_1+\beta y_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(\frac{\alpha y_1^2+\beta y_2^2+\gamma x_1^2}{\alpha+\beta+\gamma}-\left(\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{\alpha y_1+\beta y_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2\right)\right)=R,$$ kur R — pastovus skaičius. $\left(x-\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+$

$$+\left(y-\frac{\alpha y_1+\beta y_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2=\frac{R}{\alpha+\beta+\gamma}-\frac{\alpha y_1^2+\beta y_2^2+\gamma x_1^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}+\frac{(\gamma x_1)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}+\frac{(\alpha y_1+\beta y_2)^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}.$$

Dešinė šios lygybės pusė gali būti:

1) lygi nuliui. Kvadratų suma lygi nuliui tada, kai kiekvienas

sumos narys lygus nuliui. Vadinasi, $x=\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta+\gamma}$; $y=\frac{\alpha y_1+\beta y_2}{\alpha+\beta+\gamma}$. Išvada: uždavinio sąlygą tenkina tik vienas taškas M, turįs šias koordinates.

2) mažesnė už nulį. Kadangi kairė lygybės pusė negali būti neigiama, tai ši lygtis sprendinių neturi ir todėl ieškomoji aibė tuščia.

3) didesnė už nulį. Pažymėsime ją R_1^2. Tada $\left(x-\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+$ $+\left(y-\frac{\alpha y_1+\beta y_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2=R_1^2$ — apskritimo su spinduliu R_1 ir centru taške $\left(\frac{\gamma x_1}{\alpha+\beta+\gamma};\ \frac{\alpha y_1+\beta y_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$ lygtis.

b) Tegul $\alpha+\beta+\gamma=0$. Taigi, $\alpha\cdot AM^2+\beta\cdot BM^2+\gamma\cdot CM^2=(\alpha+$ $+\beta+\gamma)\cdot(x^2+y^2)-2\gamma x_1\cdot x-(2\alpha y_1+2\beta y_2)y+(\alpha y_1^2+\beta y_2^2+\gamma x_1^2)=$ $=-2\gamma x_1 x-(2\alpha y_1+2\beta y_2)y+(\alpha y_1^2+\beta y_2^2+\gamma x_1^2)=-R$; $(2\gamma x_1)\cdot x+$ $+(2\alpha y_1+2\beta y_2)\cdot y=R+(\alpha y_1^2+\beta y_2^2+\gamma x_1^2)$.

Jei $\alpha=\beta=\gamma=0$, tai $0\cdot x+0\cdot y=0$, t. y. ieškomoji aibė — visa plokštuma ($R=0$).

Jei koeficientai prie x ir y lygūs nuliui, o dešinioji lygties pusė nelygi nuliui, tai lygtis neturi sprendinių ir ieškomoji taškų aibė tuščia.

Kitais atvejais turime $ax+by=c$ pavidalo lygtį ir ieškomoji aibė — tiesė.

150. Pasirinksime koordinačių sistemą taip, kad ašis OY sutaptų su tiese a, o taškas A priklausytų ašiai OX (151 pav.). $AM_1^2=x_1^2+y^2$; $AM^2=(x-x_1)^2+y^2$. Kadangi $AM_1\cdot AM=k$, $k>0$, tai $(x_1^2+y_1^2)\cdot((x-x_1)^2+y^2)=k^2$. Kadangi $y_1/y=AM_1/AM$, tai $y_1=\frac{AM_1}{AM}y$ ir $\left(x_1^2+\frac{AM_1^2}{AM^2}y^2\right)\cdot((x-x_1)^2+y^2)=k^2$. Iš čia, kai $y=0$, atsižvelgę į tai, kad $x_1>x$ (taškui M_1 tolstant nuo taško O, taškas M artės prie taško A, pasilikdamas spindulyje AM_1, nes sandauga $AM_1\cdot AM$ pastovi), gauname: $x_1^2\cdot(x-x_1)^2=k^2$; $x_1\cdot(x_1-x)=$ $=k$; $x=x_1-\frac{k}{x_2}$. Iš to išeina, kad jei taškas M_1 sutaps su tašku O, tai jam atitinkamas taškas bus ašies OX taškas B su koordinatėmis $\left(x_1-\frac{k}{x_1};\ 0\right)$.

Sakykime, O_1 — atkarpos AB vidurys. Taško O_1 abscisė lygi

$$\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{x_1+x_1-k/x_1}{2}=\frac{2x_1^2-k}{2x_1}.$$

Įrodysime, kad trikampis ABM statusis. $AB^2=(x_A-x_B)^2=$ $=(x_1-x_1+k/x_1)^2=k^2/x_1^2$; $AM^2=(x-x_1)^2+y^2$; $BM^2=(x-x_1+$

$+k/x_1)^2+y^2$. Užtenka parodyti, kad $AM^2+BM^2=AB^2$. Turime $(x-x_1)^2+y^2+(x-x_1+k/x_1)^2+y^2=2y^2+2\,(x-x_1)^2+\frac{2(x-x_1)k}{x_1}+\frac{k^2}{x_1^2}=$

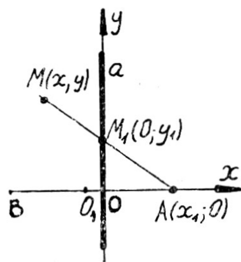
$$=2\,(y^2+(x-x_1)^2)+\frac{2(x-x_1)k}{x_1}+\frac{k^2}{x_1^2}=2\,AM^2+\frac{2(x-x_1)k}{x_1}+\frac{k^2}{x_1^2}=$$

$$=2\left(AM^2+\frac{(x-x_1)k}{x_1}\right)+\frac{k^2}{x_1^2}=2\left(AM^2+\frac{k\cdot x}{x_1}-k\right)+\frac{k^2}{x_1^2}.$$ Kadangi $AM/AM_1=\frac{x_1-x}{x_1}$, tai $AM=AM_1\cdot\frac{x_1-x}{x_1}$; $AM^2=AM_1\cdot AM\cdot\frac{x_1-x}{x_1}=$ $=k\frac{x_1-x}{x_1}=k-\frac{kx}{x_1}$. Iš to išeina, kad $AM^2+BM^2=\frac{k^2}{x_1^2}=AB^2$, $\angle AMB=90^\circ$ ir teiginys įrodytas.

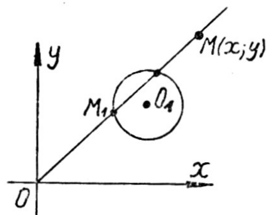
Vadinasi, taškas M yra apskritime su centru O_1 ir spinduliu $r=\frac{1}{2}AB=\frac{k}{2x_1}$. Užrašysime šio apskritimo lygtį: $\left(x-\frac{2x_1^2-k}{2x_1}\right)^2+$ $+y^2=\frac{k^2}{4x_1^2}$. Iš šio apskritimo reikia išmesti tašką A: kadangi $AM=\frac{k}{AM_1}$, tai su jokiu M_1 atkarpos AM ilgis negali būti lygus nuliui. Taškas A nepriklauso ieškomajai aibei (nors ir priklauso apskritimui).

Į apskritimo lygtį įeina duotasis teigiamas skaičius k ir x_1 — atstumas nuo taško A iki tiesės a. Uždavinys turi sprendinį su bet kokiais x_1 ($x_1>0$) ir k.

151. Įvesime koordinačių sistemą, kaip parodyta 152 paveiksle. Pažymėsime taškų M_1 (x_1; y_1), O_1 (x_0; y_0), M (x; y) koordinates. Jei taškas M_1 yra apskritime su centru O_1 ir spinduliu R, tai $(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2=R^2$. Kadangi $\overrightarrow{OM}=k\cdot\overrightarrow{OM_1}$, tai vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ (ir taško M) koordinatės lygios $\{kx_1;\ ky_1\}$. Jei $k\cdot\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{OO_2}$, tai taško O_2 koordinatės lygios (kx_0; ky_0). Parodysime, kad taškas M priklauso apskritimui su centru O_2 ir spinduliu $k\cdot R$. $(x-kx_0)^2+(y-ky_0)^2=(kx_1-kx_0)^2+$ $+(ky_1-ky_0)^2=k^2\,(x_1-x_0)^2+k^2\,(y_1-y_0)^2=$ $=k^2((x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2)=k^2\cdot R^2=(k\cdot R)^2$. Iš to išeina, kad ieškomoji aibė — apskritimas su spinduliu $k\cdot R$.



151 pav.



152 pav.

Pastaba. Lygybė $OM=k\cdot OM_1$ aprašo figūrą, centrinei panašią į duotąjį apskritimą (žr. [1], 146 p.). Iš čia gauname, kad ieškomoji aibė — apskritimas su spinduliu $k\cdot R$.

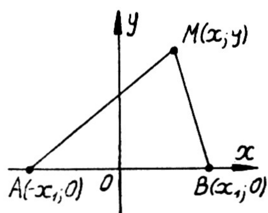
152. a) Pasirinksime koordinačių sistemą taip, kad taškas O būtų atkarpos AB vidurys (153 pav.). Tada $AM^2=(x+x_1)^2+y^2$; $BM^2=(x-x_1)^2+y^2$. Kadangi $AM^2=k^2\cdot BM^2$, tai $(x+x_1)^2+y^2=$ $=k^2\cdot(x-x_1)^2+k^2\cdot y^2$. Pagal sąlygą $k>0$ ir $k\neq 1$. $\left(x+\frac{1+k^2}{1-k^2}x_1\right)^2+$ $+y^2=\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}x_1\right)^2-x_1^2$; $\left(x+\frac{1+k^2}{1-k^2}x_1\right)^2+y^2=\left(\frac{2kx_1}{1-k^2}\right)^2$ — apskritimo su centru $O_1\left(-\frac{1+k^2}{1-k^2}x_1;\ 0\right)$ ir spinduliu $\left|\frac{2kx_1}{1-k^2}\right|$ lygtis. Bet kuris šio apskritimo taškas turi sąlygoje nurodytas savybes.

b) Pasinaudosime a) dalies brėžiniu. Apskritimo, einančio per taškus A ir B, centras O_2 yra atkarpos AB vidurio statmenyje, todėl jo koordinatės $(0;\ y_1)$. $O_2A^2=x_1^2+y_1^2$. Pagal tai, kas buvo pasakyta a) dalyje, $O_1A^2=\left(x_1-\frac{1+k^2}{1-k^2}x_1\right)^2=\left(\frac{2k^2x_1}{1-k^2}\right)^2$; $O_2O_1^2=$ $=\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}x_1\right)^2+y_1^2$. Apskaičiuosime sumą: $O_1A^2+O_2A^2=x_1^2+y_1^2+$ $+\left(\frac{2k^2x_1}{1-k^2}\right)^2=\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}x_1\right)^2+y_1^2=O_2O_1^2$.

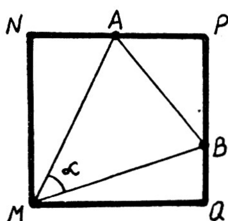
Kadangi $O_1A^2+O_2A^2=O_2O_1^2$, tai pagal teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremai, trikampis AO_1O_2 statusis ir $O_1A\perp O_2A$, ką ir reikėjo įrodyti.

153. Pažymėsime kvadrato kraštinę a. Tada $NM=MQ=a$; $NA=AP=\frac{1}{2}a$; $BQ=\frac{1}{3}a$; $PB=\frac{2}{3}a$ (154 pav.). $S_{\triangle ABM}=$ $=\frac{1}{2}AM\cdot BM\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}\cdot\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2}\cdot\sin\alpha=$ $=\frac{5\sqrt{2}}{12}a^2\sin\alpha$. Iš kitos pusės, $S_{ABM}=S_{MNPQ}-S_{MNA}-S_{APB}-S_{MQB}=$ $=\frac{5}{12}a^2$. Vadinasi, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\alpha=45^\circ$.

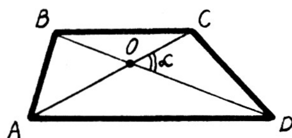
154. Pažymėsime $\angle COD=\alpha$ (155 pav.). Tada $\angle AOB=\alpha$, $\angle COB=\angle AOD=180^\circ-\alpha$. $S_{ODC}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\sin\alpha$; $S_{OAB}=$ $=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\alpha$; $S_{OBC}=\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin\alpha$; $S_{OAD}=\frac{1}{2}OA\cdot OD\sin\alpha$. Vadinasi, $S_{ODC}\cdot S_{OAB}=S_{OBC}\cdot S_{OAD}$ (1). Pagal sąlygą $S_{OBC}\cdot S_{OAD}=$ $=(S_{ODC})^2$ (2). Iš (1) ir (2): $S_{OAB}=S_{ODC}$. Vadinasi, $S_{ABC}=S_{DBC}$ ir kadangi šių trikampių pagrindas BC yra bendras, tai ir jų aukštinės, išvestos į pagrindą BC, yra lygios, t. y. $AD\parallel BC$. Todėl



153 pav.



154 pav.



155 pav.

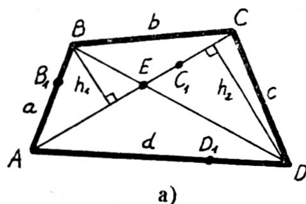
ABCD — trapecija. Jei šiame keturkampyje įstrižainės dalina viena kitą pusiau, tai $S_{BOC}=S_{AOD}$, ir todėl $AD=BC$ ir ABCD — lygiagretainis.

155. a) Tegul ABCD — iškilasis keturkampis (156 pav., a). $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_1\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BE$; $S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_2\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot DE$. Todėl $S_{ABCD}=S_{ABC}+S_{ADC}\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD$ (1). Įrodysime, kad $AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+BC\cdot AD$ (2) (Ptolemėjaus nelygybė). Atidėsime $AB_1=\frac{1}{AB}$; $AC_1=\frac{1}{AC}$; $AD_1=\frac{1}{AD}$. Tada $\frac{AB}{AC}=\frac{AC_1}{AB_1}$, t. y. $\triangle ABC\sim\triangle AC_1B_1$ ir panašumo koeficientas $\frac{1}{AB\cdot AC}$. Todėl $B_1C_1=\frac{BC}{AB\cdot AC}$. Analogiškai $C_1D_1=\frac{CD}{AC\cdot AD}$ ir $B_1D_1=\frac{BD}{AB\cdot AD}$. $B_1D_1\leqslant B_1C_1+C_1D_1$ pagal trikampio nelygybę, todėl $\frac{BD}{AB\cdot AD}\leqslant\frac{BC}{AB\cdot AC}+\frac{CD}{AC\cdot AD}$. Padauginsime šią nelygybę $AB\cdot AC\cdot AD$: $BD\cdot AC\leqslant BC\cdot AD+CD\cdot AB$.

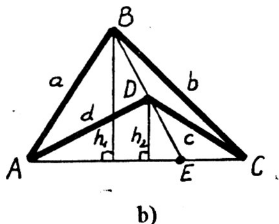
Dabar grįšime prie (1) nelygybės:

$S_{ABCD}\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD\leqslant\frac{1}{2}(BC\cdot AD+CD\cdot AB)$ arba $S\leqslant\frac{1}{2}(ac+bd)$.

b) Tegul dabar ABCD — neiškilasis keturkampis (156 pav., b) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_1\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BE$; $S_{ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_2\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot DE$.



a)



b)

156 pav.

Turime nelygybes su teigiamais nariais, todėl $S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2} AC \cdot (BE - DE) = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

Siūlome patikrinti, ar šiuo atveju tenkinama nelygybė (2) iš a) dalies.

156. $S_{AA_1B} = \frac{1}{2} AB \cdot AA_1 \cdot \sin \frac{A}{2}$; $S_{AA_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot AA_1 \cdot \sin \frac{A}{2}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$ (157 pav.). Vadinasi, $AB \cdot AC \cdot \sin A = AB \cdot AA_1 \cdot \sin \frac{A}{2} + AC \cdot AA_1 \cdot \sin \frac{A}{2}$ arba $b \cdot c \cdot \sin A = AA_1 (b + c) \sin \frac{A}{2}$; $AA_1 = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{(b+c) \cdot \sin \frac{A}{2}}$.

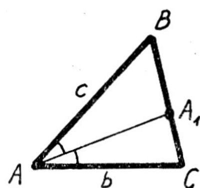
Iš algebros kurso žinome, kad $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$, todėl $AA_1 = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b+c}$.

157. Kadangi keturkampis įbrėžtinis (158 pav.), tai $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$; $\angle C = 180° - \angle A$; $\angle D = 180° - \angle B$; $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Pagal kosinusų teoremą iš trikampio ABC: $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$ (1); iš trikampio ADC: $AC^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos B$. Iš čia $\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ (2). Iš trikampio ABD: $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$ (3). Iš trikampio CBD: $BD^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. $\cos A = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$ (4). Iš (1) ir (3), atsižvelgiant į (2) ir (4): $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} = \frac{a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2}{ab+cd}$; $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)} = \frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad+bc}$.

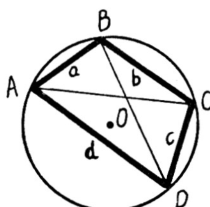
Vadinasi,

$$AC = \sqrt{\frac{a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2}{ab+cd}}; \quad BD = \sqrt{\frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad+bc}}.$$

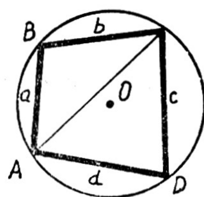
158. Iš trikampio ABC (159 pav.): $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B$; iš trikampio ADC: $AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D$. $\angle B + \angle D = 180°$; $\cos D = -\cos B$. Vadinasi, $\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$; $\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}$. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}(ab+cd) \sin B$; $4S^2_{ABCD} = (ab+cd)^2 \cdot \sin^2 B = (ab+cd)^2 \cdot \left(1 - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}\right) = \frac{1}{4} (4(ab+cd)^2 -$



157 pav.



158 pav.



159 pav.

$-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2)=\frac{1}{4}(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)\cdot(2ab+2cd-$ $-a^2-b^2+c^2+d^2)=\frac{1}{4}((a+b)^2-(c-d)^2)\cdot((c+d)^2-(a-b)^2)$; $S^2_{ABCD}=$ $=\frac{1}{16}(a+b+c-d)\ (a+b-c+d)\ (c+d+a-b)\ (c+d-a+b)$. Pažymėsime $\frac{1}{2}(a+b+c+d)=p$. Tada $\frac{a+b+c-d}{2}=p-d$; $\frac{a+b-c+d}{2}=p-c$; $\frac{c+d+a-b}{2}=p-b$; $\frac{c+d-a+b}{2}=p-a$.

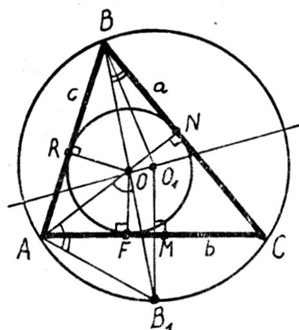
Todėl $S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$.

Pastabos. 1) Įrodytoji formulė vadinama Brachmaguptos (mūsų eros VII amžiaus Indijos matematikas) formule. Jei gautojoje formulėje imtume $d=0$, tai gautume Horono formulę trikampio plotui skaičiuoti: $S=\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$.

2) Jei keturkampis su kraštinėmis a, b, c, d įbrėžtas į vieną apskritimą ir apibrėžtas apie kitą, tai jo plotas apskaičiuojamas iš formulės: $S=\sqrt{a\,b\,c\,d}$.

159. Braižysime taip, kaip parodyta 160 paveikslėlyje. O_1 — apibrėžto apskritimo centras, O — įbrėžto apskritimo centras. Iš pradžių įrodysime, kad $AB_1=B_1O$. Pagal trikampio priekampio savybę $\angle AOB_1=\angle BAO+\angle ABO=$ $=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$. $\angle OAB_1=\angle OAC+$ $+\angle CAB_1=\frac{1}{2}\angle A+\angle CBB_1=\frac{1}{2}(\angle A+$ $+\angle B)$. Iš to išplaukia, kad $\triangle AOB_1$ lygiašonis, $AB_1=B_1O$ (1).

Dabar apskaičiuosime atkarpos BN ilgį. $BN+AF=RB+AR=AB$ — pagal liestinių, išvestų iš vieno taško, savybę. $CN+CF=AB+BC+AC-AB-$ $-(BN+AF)=a+b-c$. Bet $CN=CF$, todėl $CN=\frac{1}{2}(a+b-c)$. $BN=BC-$



160 pav.

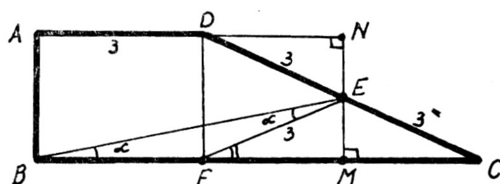
$-CN=a-\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(a+c-b)=p-b$, kur $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Tarkime, kad trikampio ABC kraštinės sudaro aritmetinę progresiją: tegul $a<b<c$, $\frac{a+c}{2}=b$; $a+c=2b$. Tada $p=\frac{3}{2}b$, $BN=$ $=p-b=\frac{1}{2}b=AM$. Kampai B_1BC ir B_1AC įbrėžtiniai ir remiasi į lanką B_1C, todėl jie lygūs. Kadangi O_1B_1 — atkarpos AC vidurio statmuo, tai statieji trikampiai OBN ir AB_1M lygūs. Iš čia: $OB=AB_1$ (2). Iš (1) ir (2): $OB=OB_1$. Trikampis BB_1O_1 lygiašonis, todėl pusiaukraštinė OO_1 yra ir aukštinė, t. y. $OO_1\perp BB_1$.

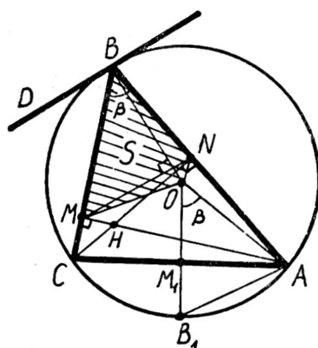
Dabar įrodysime atvirkštinį teiginį: jei $OO_1\perp BB_1$, tai trikampio ABC kraštinės sudaro aritmetinę progresiją. Kadangi trikampis BB_1O_1 lygiašonis ir $OO_1\perp BB_1$, tai $BO=OB_1$. Anksčiau buvo įrodyta, kad $AB_1=OB_1=OB$; $\angle B_1BC=B_1AC$. Todėl $\triangle OBN=$ $=\triangle AB_1M$ (pagal įžambinę ir smailųjį kampą). Iš čia $BN=AM$. Vadinasi, $BN=\frac{1}{2}b$ ir kadangi $BN=p-b$, tai $p=\frac{3}{2}b$, t. y. $\frac{a+c}{2}=b$. Iš to išplaukia, kad trikampio kraštinės sudaro aritmetinę progresiją.

160. Nesunku pastebėti, kad $S_{ABCD}=S_{ABMN}$ (161 pav.). Trikampis DFC statusis, $FE=DE=EC=3$. Todėl trikampis BFE lygiašonis, $\angle BEF=\alpha$. Todėl $\angle EFC=2\alpha$. Iš trikampio EFM: $\frac{FM}{EF}=\cos 2\alpha$; $FM=3\cos 2\alpha$. $BM=BF+FM=3+3\cos 2\alpha=3(1+\cos 2\alpha)=6\cos^2\alpha$. Iš trikampio BEM, pažymėjus $EM=\frac{1}{2}NM=\frac{1}{2}h$, pagal Pitagoro teoremą randame: $\left(\frac{1}{2}h\right)^2=(BE)^2-(BM)^2$. Iš trikampio BEF pagal sinusų teoremą $\frac{BE}{\sin(180^\circ-2\alpha)}=\frac{EF}{\sin\alpha}$; $BE=\frac{3\cdot\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=6\cos\alpha$. Todėl $\frac{1}{4}h^2=$ $=(6\cos\alpha)^2-(6\cos^2\alpha)^2$; $h^2=36\sin^2 2\alpha$; $h=6\sin 2\alpha$. $S_{ABCD}=AB\cdot BM=$ $=72\sin\alpha\cos^3\alpha$.

161. Iš trikampio BCN (162 pav.): $BN=BC\cdot\cos\beta$; iš trikampio BAM: $BM=AB\cos\beta$. Kadangi trikampiai MBN ir ABC turi bendrą kampą B, tai $\triangle MBN\sim\triangle ABC$, be to, panašumo koeficientas lygus $\cos\beta$ (kadangi trikampis smailusis, tai $\cos\beta>0$). Todėl $MN=AC\cdot\cos\beta$ (1) ir $\angle BMN=\angle BAC$. Jei BD — apibrėžto apskritimo liestinė, tai $\angle DBC=\angle CAB$, nes jie abu lygūs pusei lanko BC. Vadinasi, $\angle DBC=\angle BMN$, ir todėl $MN\parallel BD$. Kadangi $DB\perp$ $\perp OB$, tai ir $MN\perp OB$. Todėl $S_{MONB}=S_{MBN}+S_{MON}$; $S=S_{MONB}=$ $=\frac{1}{2}MN\cdot BO$. Jei OB_1 — atkarpos AC vidurio statmuo, tai



161 pav.

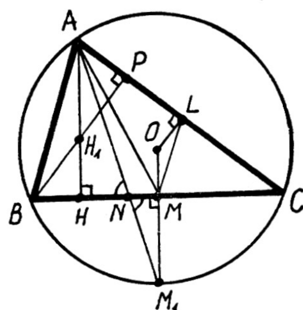


162 pav.

$\angle AOB_1=\beta$, nes $\angle ABC=\frac{1}{2}\cup AB_1C$. Kadangi $AM_1 : OM_1=\mathrm{tg}\beta$, tai $AM_1=OM_1\mathrm{tg}\beta$, $AC=2AM_1=2OM_1\mathrm{tg}\beta$. $S=\frac{1}{2}MN\cdot BO=\frac{1}{2}OB_1\cdot$ $\cdot AC\cdot\cos\beta$. Iš čia $AC=\frac{2S}{OB_1\cdot\cos\beta}$. Kadangi $AM_1=OA\sin\beta$, tai $\frac{AC}{2OA}=$ $=\sin\beta$; $OA=\frac{AC}{2\sin\beta}$ ir kadangi $OB_1=OA$, tai $AC=\frac{2S\cdot 2\sin\beta}{AC\cdot\cos\beta}$; $AC^2=$ $=4\,S\,\mathrm{tg}\beta$, $AC=2\sqrt{S\,\mathrm{tg}\beta}$.

162. Tegul O — apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras (163 pav.). Išvesime $OL\perp AC$, $OM\perp BC$. Kadangi LM — trikampio ABC vidurio linija, $LM\parallel AB$, $OL\parallel BP$, $OM\parallel AH_1$, tai $\triangle ABH_1\sim\triangle MOL$. Todėl $\frac{AH_1}{OM}=\frac{AB}{LM}$. Bet $\frac{AB}{LM}=2$. Vadinasi, $AH_1=$ $=2\cdot OM$ (1). Iš trikampio AHM: $HM=\sqrt{l^2-h^2}$. Iš to išeina, kad $HN=NM=\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2}$. Iš trikampio AHN : $AN=\frac{1}{2}\sqrt{l^2+3\,h^2}$.

$\triangle AHM=\triangle M_1MN$, nes jie statieji ir $\angle ANM=\angle M_1NM$; $HN=NM$, todėl $MM_1=AH=h$, $NM_1=AN$. Pažymėsime $OB=OM_1=R$. Tada $OM=OM_1-MM_1=$ $=R-h$. Iš trikampio OBM : OB^2- $-OM^2=BM^2$; $2Rh-h^2=BM^2$ (2). Pagal stygų savybę: $AN\cdot NM_1=$ $=BN\cdot NC$; $BN=MB-NM=BM-$ $-\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2}$; $NC=NM+MC=BM+$ $+\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2}$, todėl $\frac{1}{4}(l^2+3h^2)=(BM-$



163 pav.

$-\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2})\cdot(BM+\frac{1}{2}\sqrt{l^2-h^2})$; $\frac{1}{4}(l^2+3h^2)=BM^2-\frac{1}{4}(l^2-h^2)$; $BM^2=\frac{1}{2}(l^2+h^2)$. Įstatysime į (2): $2Rh-h^2=\frac{1}{2}(l^2+h^2)$; $R=\frac{l^2+3h^2}{4h}$. Kadangi $OM=R-h$, tai $OM=\frac{l^2-h^2}{4h}$. Įstatysime į (1): $AH_1=$ $=\frac{l^2-h^2}{2h}$.

163. Kadangi dešimtkampis taisyklingas, tai $\angle AOB=\frac{1}{10}\cdot 360°=$ $=36°$ (164 pav.). $AO=BO$, todėl $\angle OAB=\angle OBA=72°$, AC — pusiaukampinė, todėl $\angle BAC=\angle OAC=36°$. Vadinasi, $AC=$ $=OC$, $\angle ACB=72°$. Todėl $AC=AB$.

a) Kadangi trikampių ABC ir OAB kampai lygūs 72°, 72°, 36°, tai tie trikampiai panašūs.

b) Jau įrodėme, kad $AB=AC=OC$. Pažymėsime $AO=BO=R$, $AB=AC=OC=x$. Iš trikampių ABC ir ABO panašumo: $\frac{AB}{BC}=\frac{BO}{AB}$; $\frac{x}{R-x}=\frac{R}{x}$; $x^2+Rx-R^2=0$; $x_{1,2}=\frac{-R\pm R\sqrt{5}}{2}$; $x>0$, $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$.

Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad skaičius $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ apibūdina „auksinį pjūvį" — atkarpos dalijimas viduriniu ir kraštutiniu santykiu.

164. Pagal ankstesnįjį uždavinį taisyklingo dešimtkampio, įbrėžto į apskritimą spinduliu R, kraštinė lygi $\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Apskaičiuosime AK (165 pav.). $KC=OC=BC=\frac{R}{2}$. Iš trikampio AOC: $AC=\sqrt{R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}R$. Todėl $AK=AC-KC=\frac{\sqrt{5}}{2}R-\frac{R}{2}=$ $=\frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. Teiginys įrodytas.

165. Penkiakampio vidinių kampų suma lygi 540°, todėl kiekvienas penkiakampio kampas lygus 108° (166 pav.). Trikampis $A_1A_4A_5$ lygiašonis, todėl $\angle A_1=\angle A_4=36°$. Vadinasi, $\angle MA_4C=$ $=\angle A_5A_4C-\angle A_5A_4M=72°$. Todėl $\angle A_2A_3A_4+\angle A_1A_4A_3=180°$ ir, vadinasi, $A_1A_4\parallel A_2A_3$, AC — lygiašonės trapecijos $A_1A_2A_3A_4$ vidurio linija. Šios trapecijos įstrižainės yra lygios, todėl lygiagretainis ABCM yra rombas ir jo įstrižainės statmenos, $AC\perp BM$. $\triangle ABC=\triangle AMC$, įbrėžtų į šiuos trikampius apskritimų centrai O_1 ir O yra atkarpoje BM. $O_1O_2=OO_2$, iš to išplaukia, kad taškai O ir O_1 simetriški tiesės AC atžvilgiu. Įrodysime, kad taškas O yra apie penkiakampį apibrėžto apskritimo centras. $AA_2=A_2B$ ir iš trikampio AA_2B: $\angle AA_2B=108°$, $\angle A_2AB=\angle A_2BA=36°$; $\angle CAA_2=\angle A_4A_1A_2=72°$, todėl $\angle CAB=\angle CAA_2-\angle BAA_2=36°$.

164 pav.

165 pav.

166 pav.

Vadinasi, $\angle ABM=54°$ ir $\angle AMC=108°$, $\angle MAC=\angle MCA=36°$. Jei O — į trikampį AMC įbrėžto apskritimo centras, tai taškas O yra atkarpos BM ir kampo A pusiaukampinės sankirtoje. Todėl trikampyje AOC : $\angle OAC=\angle OCA=18°$, $\angle AOC=144°$ (1).

Apie penkiakampį apibrėžto apskritimo centrą pažymėsime O^1. Tada $\angle A_1O^1A_2=\angle A_2O^1A_3=\angle A_3O^1A_4=72°$ ir $\angle AO^1A_2=$ $=\angle A_3O^1C=36°$ (trikampiai $A_1O^1A_2$ ir $A_3O^1A_4$ lygiašoniai). Todėl $\angle AO^1C=\angle AO^1A_2+\angle A_2O^1A_3+\angle A_3O^1C=36°+72°+36°=$ $=144°$ (2). Sulyginę (1) ir (2), gauname, kad taškai O ir O^1 sutampa. Taigi, įbrėžto į trikampį ABC ir apibrėžto apie penkiakampį apskritimų centrai simetriški tiesės AC atžvilgiu.

166. Pasinaudodami 163 ir 164 uždaviniais, nubraižysime atkarpą AK (žr. paveikslėlį prie 164 uždavinio), lygią taisyklingo dešimtkampio, įbrėžto į duotąjį apskritimą, kraštinei. Šios atkarpos ilgiu skriestuvu pažymėsime apskritime taškus ir juos sujungsime. Akivaizdu, kad gautasis daugiakampis taisyklingas.

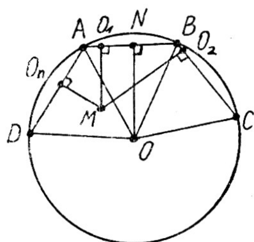
167. Pasinaudosime ankstesniuoju uždaviniu ir į duotąjį apskritimą įbrėšime taisyklingą dešimtkampį. Sujungus kas antrą gautąsias viršūnes, gausime penkiakampį, kurio kraštinės ir kampai lygūs (įrodymas akivaizdus). Uždavinys išspręstas.

168. Jei sujungsime penkiakampės žvaigždės, įbrėžtos į duotąjį apskritimą, viršūnes, tai gausime taisyklingą penkiakampį, įbrėžtą į šį apskritimą. Iš čia išplaukia braižymo būdas: naudojantis ankstesniuoju uždaviniu, braižome taisyklingą penkiakampį; kas antrą viršūnę sujungiame stygomis. Gautojo neiškilojo daugiakampio kampai, kaip įbrėžtiniai ir besiremiantys į lygius

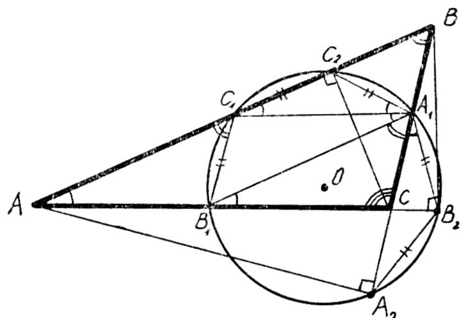
lankus, bus lygūs. Minėtosios stygos lygios tarpusavyje, nes jos atkerta lygius lankus (po 144°).

169. Tegul $AB=a_n$ — taisyklingo n-kampio kraštinė (167 pav.), $ON=r$ — įbrėžto į jį apskritimo spindulys. Kadangi $S_{AOB}=\frac{1}{2}BA\cdot ON=\frac{1}{2}a_n\cdot r$, tai $S_{daugiak.}=n\cdot S_{AOB}=\frac{1}{2}a_n\cdot n\cdot r$ (1). Dabar apskaičiuosime tą patį plotą kitu būdu: padalinsime daugiakampį į trikampius, sujungdami tašką M su daugiakampio viršūnėmis. Tada $S_1=\frac{1}{2}AB\cdot O_1M=\frac{1}{2}a_n\cdot O_1M$, $S_2=\frac{1}{2}BC\cdot O_2M=\frac{1}{2}a_n\cdot O_2M$ ir t. t. $S_n=\frac{1}{2}DA\cdot O_nM=\frac{1}{2}a_n\cdot O_nM$. Todėl $S_{daugiak.}=S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n=\frac{1}{2}a_n\cdot(O_1M+O_2M+\ldots+O_nM)$ (2). Iš (1) ir (2) : $O_1M+O_2M+\ldots+O_nM=n\cdot r$, ką ir reikėjo įrodyti.

170. Tegul A_1, B_1, C_1 — trikampio ABC kraštinių vidurio taškai, A_2, B_2, C_2 — jo aukštinių pagrindai (168 pav.). Pagal 125 uždavinį, šie šeši taškai yra Eulerio apskritime. Pagal sąlygą $\angle B=2\angle A$, $\angle C=2\angle B$, todėl $\angle A+\angle B+\angle C=\frac{7}{2}\angle B$; $\angle A=\frac{180^\circ}{7}$; $\angle B=2\cdot\frac{180^\circ}{7}$; $\angle C=4\cdot\frac{180^\circ}{7}$. Taisyklingo septynkampio kampas lygus $\frac{180^\circ\cdot(7-2)}{7}=5\cdot\frac{180^\circ}{7}$. B_1C_1— trikampio ABC vidurio linija, todėl $\angle AC_1B_1=\angle B=2\cdot\frac{180^\circ}{7}$. Vadinasi, $\angle C_2C_1B_1=180^\circ-2\cdot\frac{180^\circ}{7}=5\cdot\frac{180^\circ}{7}$; $B_1C_1=BA_1=A_1C$. Stačiajame trikampyje BC_2C : C_2A_1 — apibrėžto apskritimo spindulys; $C_2A_1=BA_1=A_1C$. Todėl $B_1C_1=C_2A_1$. A_1B_1 — trikampio ABC vidurio linija, todėl $A_1B_1 \| C_1C_2$ ir $B_1C_1C_2A_1$ — lygiašonė trapecija. Iš to išeina, kad $\angle C_1C_2A_1=\angle C_2C_1B_1=5\cdot\frac{180^\circ}{7}$; $\angle C_2C_1A_1=\angle BAC=\frac{180^\circ}{7}$. Kadangi trikampyje $A_1C_1C_2$ $\angle C_1=\frac{180^\circ}{7}$, $\angle C_2=5\cdot\frac{180^\circ}{7}$, tai $\angle C_2A_1C_1=\frac{180^\circ}{7}$. Vadinasi, trikampis $A_1C_1C_2$ lygiašonis, $C_1C_2=A_1C_2$. A_1C_1 — trikampio ABC vidurio linija, todėl $\angle C_1A_1B_1=\angle A_1B_1C$ (1). Jei kampai, įbrėžti į Eulerio apskritimą, yra lygūs, tai lygios ir stygos, į kurias remiasi tie kampai. Tada iš (1) išeina: $A_1B_2=B_1C_1$. $\angle B_1A_1C=\angle ABC=2\cdot\frac{180^\circ}{7}$; $\angle A_1CB_2=180^\circ-\angle ACB=108^\circ-4\cdot\frac{180^\circ}{7}=3\cdot\frac{180^\circ}{7}$. Kadangi $A_1C=A_1B=A_1B_2$ (trikampis CBB_2 statusis), tai trikampis A_1CB_2 — lygiašonis ir todėl $\angle CA_1B_2=\frac{180^\circ}{7}$. Vadinasi, $\angle C_2A_1B_2=5\cdot\frac{180^\circ}{7}$ ir kadangi kam-



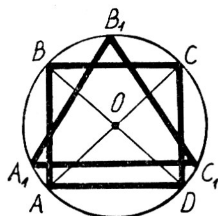
167 pav.



168 pav.

pas $A_2A_1B_2$, įbrėžtas į Eulerio apskritimą, lygus $\frac{180^0}{7}$, tai styga A_2B_2 lygi A_1B_2. Iš to išplaukia, kad trikampis $A_1B_2A_2$ lygiašonis ir $\angle A_1B_2A_2=5\cdot\frac{180^0}{7}$.

Taigi, mes įrodėme, kad $B_1C_1 = C_1C_2 = C_2A_1 = A_1B_2 = B_2A_2$; $\angle B_1C_1C_2=\angle C_1C_2A_1=\angle C_2A_1B_2=\angle A_1B_2A_2=5\cdot\frac{180^0}{7}$. Iš to išplaukia, kad taškai B_1, C_1, C_2, A_1, B_2, A_2 yra taisyklingo septynkampio (įbrėžto į Eulerio apskritimą) šešios viršūnės.

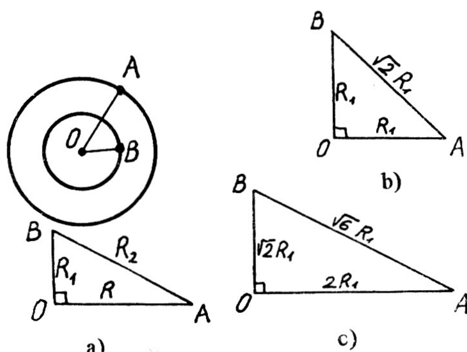


169 pav.

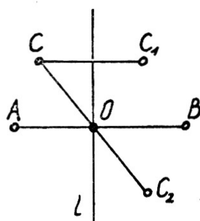
171. Kadangi $A_1B_1=R\sqrt{3}$, $AB=R\sqrt{2}$ (169 pav.), tai $AB+A_1B_1=R(\sqrt{2}+\sqrt{3})\approx3{,}1462$ R. Pusapskritimio ilgis lygus $\pi R\approx3{,}1416$ R. Taigi, su tikslumu iki 0,01 R : $a_3+a_4=\pi R$.

172. Pasinaudosime brėžiniu iš uždavinio sąlygos. Iš trikampio AOD: $\angle AOD=30°$, $AD=\frac{1}{2}OD=\frac{1}{2}R$; $AO=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Todėl $AB=\frac{\sqrt{3}+2}{2}\cdot R$. Iš trikampio ABC : $AC=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}R\right)^2+(6\,R)^2}=\frac{1}{2}R\sqrt{151+4\sqrt{3}}\approx6{,}2834\,R$ (1). Apskritimo ilgis lygus $C=2\pi R\approx6{,}2832$ R (2). Iš (1) ir (2) gauname uždavinio teiginį.

173. Pasinaudosime brėžiniu iš uždavinio sąlygos. Tegul $AC=2R_1$, $OC=R_2$, $OE=R_3$. Apskaičiuosime duotosios figūros plotą. $S^1=S_1-2S_2+S_3$, kur $S_1=\frac{1}{2}\pi R_3^2$; $2S_2=\pi R_1^2$; $S_3=\frac{1}{2}\pi R_2^2$; $S^1=\frac{1}{2}\pi(R_3^2-2R_1^2+R_2^2)$. Kadangi $R_2=R_3-2R_1$, tai $R_1=\frac{1}{2}(R_3-R_2)$; $S^1=\frac{1}{2}\pi(R_3^2-2\cdot\frac{1}{4}(R_3-R_2)^2+R_2^2)=\frac{1}{4}\pi(R_2+R_3)^2$. Dabar apskaičiuosi-



170 pav.



171 pav.

me skritulio, kurio skersmuo EF, plotą. $EF=R_2+R_3$; $R_4=\frac{1}{2}EF$; $S''=\frac{1}{4}\pi\ (R_2+R_3)^2$. Taigi, $S^1=S''$, ką ir reikėjo įrodyti.

174. a) Skritulio kraštas — apskritimas. $OA=R_2$, $OB=R_1$. $S_{žiedo}=\pi R_2^2-\pi R_1^2=\pi\ (R_2^2-R_1^2)$; $S_{skrit.}=\pi R^2$. Kadangi $S_{žiedo}=$ $=S_{skrit.}$, tai $R^2=R_2^2-R_1^2$; $R=\sqrt{R_2^2-R_1^2}$. Braižome R ilgio atkarpą (170 pav., a). Apskritimo su spinduliu R ilgis yra $2\pi R$, ieškomosios atkarpos ilgis $2\pi\cdot OA$.

b) $S_{pusskrit.}=\frac{1}{2}\pi R_1^2$; $S_{skrit.}=\pi R^2$ ir kadangi $S_{pusskrit.}=S_{skrit.}$, tai $R=\frac{\sqrt{2}}{2}R_1$. Apskritimo ilgis $C=2\pi R=\pi\sqrt{2}R_1$. Atkarpą $\sqrt{2}R_1$ brėžiame taip, kaip parodyta 170b paveikslėlyje.

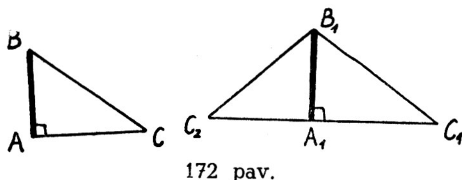
c) Kadangi $S_{sekt.}=\frac{1}{6}S_{skrit.}$, tai $S_{sekt.}=\frac{1}{6}\pi R_1^2$; $S_{skrit.}=\pi R^2$; $\pi R^2=$ $=\frac{1}{6}\pi R_1^2$; $R=\frac{R_1\sqrt{6}}{6}$. Braižome atkarpą $\sqrt{2}R_1$ (170 pav., c) (žr. b) dalį), po to ir atkarpą $R_1\sqrt{6}$. Toliau akivaizdu.

175. Taškai A ir B, duotojo judesio atvaizduojami vienas į kitą, gali būti simetriški atkarpos AB vidurio taško O arba tos atkarpos vidurio statmens l atžvilgiu (centrinė ir ašinė simetrija) (171 pav.). Du taškai nepilnai apibūdina duotąjį judesį: mes negalime numatyti, į kokį tašką bus atvaizduotas taškas C, nesantis tiesėje AB. Jei C bus atvaizduojamas į C_1, tai duotasis judesys — ašinė simetrija, jei į C_2, tai — centrinė simetrija. Vadinasi, trijų taškų atvaizdis pilnai apibūdina judesį (žr. [1], 1155 užd.).

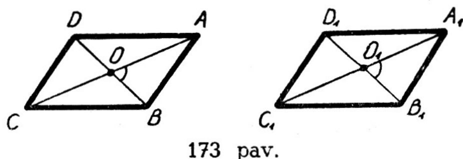
176. Ankstesniajame uždavinyje buvo pasakyta, kad trijų taškų atvaizdis vienareikšmiškai apibūdina judesį. Todėl, norint api-

brėžti plokštumos atvaizdį į save, reikia išnagrinėti trečiojo taško C atvaizdį.

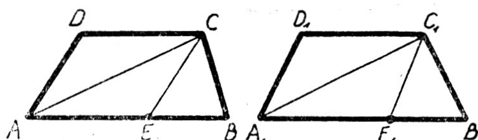
Neapribojant nagrinėjimo bendrumo, tašką C parinksime taip, kad $AC = AB$ ir $\angle BAC = 90^\circ$ (172 pav.). Tada $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ ir kadangi trikampiai ABC ir $A_1B_1C_1$ lygūs, tai egzistuoja uždėjimas (t. y. judesys), kai taškai A, B, C atvaizduojami atitinkamai į taškus A_1, B_1, C_1. Toks judesys yra vienintelis. Tačiau taškas C gali būti atvaizduojamas į tašką C_2. Tada taip pat egzistuos vienintelis judesys, kuriuo taškai A, B, C bus atvaizduojami atitinkamai į taškus A_1, B_1, C_2.



172 pav.



173 pav.



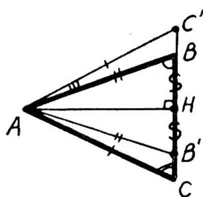
174 pav.

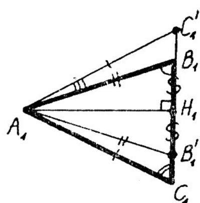
Taigi, egzistuoja tik du judesiai, kuriais taškai A ir B yra atvaizduojami atitinkamai į taškus A_1 ir B_1.

177. Pagal sąlygą $AC = A_1C_1$, $BD = B_1D_1$, $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ (173 pav.). Kadangi įstrižainės dalina viena kitą pusiau, tai $AO = A_1O_1$, $BO = B_1O_1$. Iš to išplaukia, kad $\triangle AOB = \triangle A_1O_1B_1$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Todėl egzistuoja judesys, kuriuo taškai A, O, B atvaizduojami atitinkamai į taškus A_1, O_1, B_1. Šiuo judesiu atkarpa BD atvaizduojama į atkarpą B_1D_1 (ilgis išlieka nepakitęs), o atkarpa AC — į A_1C_1. Taškas C atvaizduojamas į tašką C_1, o D — į D_1. Vadinasi, egzistuoja judesys, kuriuo ABCD atvaizduojamas į $A_1B_1C_1D_1$ ir iš to išplaukia, kad lygiagretainiai lygūs.

178. Atidėsime $AE = DC$, $A_1E_1 = D_1C_1$, išvesime CE ir C_1E_1 (174 pav.). Trikampiai BCE ir $B_1C_1E_1$ lygūs pagal tris kraštines, todėl egzistuoja vienintelis judesys, kuriuo vienas trikampis atvaizduojamas į kitą ([1], 1156 užd.). Be to, BA bus atvaizduojama į B_1A_1. Trikampiai ACD ir $A_1C_1D_1$ lygūs pagal tris kraštines ir nurodytu judesiu, kai AC atvaizduojama į A_1C_1, pirmasis iš jų atvaizduojamas į antrąjį. Iš to išplaukia, kad trapecija ABCD atvaizduojama į trapeciją $A_1B_1C_1D_1$ ir todėl jos lygios.

179. Tegul $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle B - \angle C = \angle B_1 - \angle C_1$, $AH \perp BC$, $A_1H_1 \perp B_1C_1$ (175 pav.). Nubraižysime duotųjų trikampių





175 pav.

176 pav.

atvaizdus, simetriškus tiesių AH ir A_1H_1 atžvilgiu. Gausime trikampius AB^1C^1 ir $A_1B_1'C_1'$. Kadangi $\angle ABC^1 = 180° - \angle B$, $\angle AC^1B = \angle C$, $\angle A_1B_1C_1' = 180° - \angle B_1$, $\angle A_1C_1'B_1 = \angle C_1$, tai $\angle C^1AB = \angle B^1 - \angle C$, $\angle C_1'A_1B_1 = \angle B_1 - \angle C_1$, ir dėl to $\angle C^1AB = \angle C_1'A_1B_1$. $AC^1 = AC = A_1C_1 = A_1C_1^1$. Todėl $\triangle ABC^1 = \triangle A_1B_1C_1'$ pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų. Iš to išeina, kad egzistuoja judesys, kuriuo vienas iš šių trikampių atvaizduojamas į kitą. Šis judesys yra vienintelis ([1], 1155 užd.) ir atvaizduoja tiesės C^1B atkarpą BC į tiesės $C_1'B_1$ atkarpą B_1C_1. Vadinasi, šiuo judesiu trikampis ABC atvaizduojamas į trikampį $A_1B_1C_1$ ir todėl šie trikampiai tarpusavyje lygūs.

180. Tegul O — lygiagretainio ABCD įstrižainių susikirtimo taškas (176 pav.). Pirmiausia įrodysime, kad bet kurią atkarpą, kurios galai yra lygiagretainio kraštinėse ir kuri eina per tašką O, taškas O dalina pusiau. Jei B_2D_2 tokia atkarpa, tai kadangi $\triangle OB_2C = \triangle OD_2A$ ($AO = OC$, $\angle B_2CO = \angle D_2AO$, $\angle B_2OC = \angle D_2OA$), tai $B_2O = OD_2$.

Dabar, naudojant lygiagretųjį postūmį ir Talio teoremą, nesunku parodyti, kad bet kurios atkarpos, kurios galai yra lygiagretainio ABCD kraštinėse BC ir AD, vidurys yra tiesėje, einančioje per tašką O ir lygiagrečioje kraštinei BC.

Iš to išeina, kad lygiagretainio $A_1B_1C_1D_1$ įstrižainės B_1D_1 vidurys turi būti toje tiesėje.

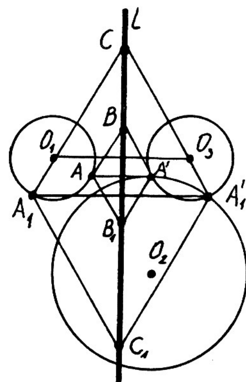
Analogiškai mąstydami, gauname, kad lygiagretainio $A_1B_1C_1D_1$ įstrižainė A_1C_1 turi būti tiesėje, einančioje per tašką O ir lygiagrečioje kraštinei AB.

Šių įstrižainių susikirtimo taškas turi priklausyti ir vienai, ir kitai iš šių tiesių. Bet šios tiesės turi tik vieną bendrą tašką — O. Todėl duotųjų lygiagretainių įstrižainių susikirtimo taškai sutampa.

181. Jei duotieji apskritimai su centrais O_1 ir O_2 neturi taškų, simetriškų duotosios tiesės l atžvilgiu, tai uždavinys sprendinių neturi.

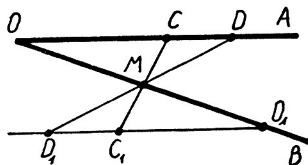
Tarkime, kad apskritimas su centru O_3 simetriškas tiesės l atžvilgiu duotajam apskritimui su centru O_1, kerta duotąjį apskriti-

mą su centru O_2 taškuose A^1 ir A_1 (177 pav.). Randame tiesės l atžvilgiu simetriškus jiems taškus A ir A_1. Braižome lygiakraščius trikampius ABA', AB_1A^1, A_1CA_1', $A_1C_1A_1'$, tenkinančius uždavinio sąlygą. Kadangi du apskritimai (su centrais O_2 ir O_3) gali neturėti bendrų taškų, turėti vieną, du arba be galo daug (sutapti) bendrų taškų, tai uždavinys gali neturėti sprendinio, turėti du, keturis arba be galo daug sprendinių.



177 pav.

182. Tegul taškas M yra kraštinėje OB (178 pav.). Nubraižysime tiesę, simetrišką tiesei OA taško M atžvilgiu. Tiesėje OA atidėsime du taškus C ir D ir surasime taškus C_1 ir D_1, simetriškus jiems taško M atžvilgiu. Kadangi O — tiesių OA ir OB bendras taškas, tai jam atitinkantis taškas yra tiesių C_1D_1 ir OB susikirtime (tiesė OB yra atvaizduojama pati į save, nes joje yra simetrijos centras). Iš to išeina, kad $MO_1=OM$.

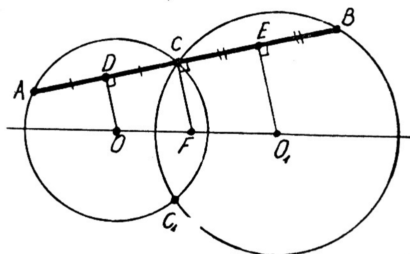


178 pav.

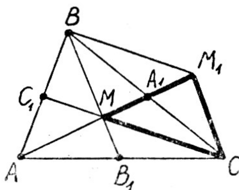
Uždavinys visada turi vienintelį sprendinį.

183. Jei AB — ieškomoji atkarpa, tai AC=CB (179 pav.). Simetrija taško C atžvilgiu taškai A ir B atvaizduojami vienas į kitą. Tiesė CF, $CF \perp AB$, yra atkarpos AB simetrijos ašis. Kadangi AD=CD, CE=BE ($OD \perp AC$, $O_1E \perp BC$) ir AC=BC, tai CD=$=$CE. Pagal Talio teoremą $OF=FO_1$. Iš čia ir braižymo būdas: daliname atkarpą OO_1 pusiau; išvedame tiesę per taškus C ir F; per tašką C išvedame $AB \perp CF$. Analogiškai per tašką C_1 galima išvesti $A_1B_1 \perp C_1F$. Nesunku įrodyti, kad taškai C ir C_1 dalija atitinkamai atkarpas AB ir A_1B_1 pusiau.

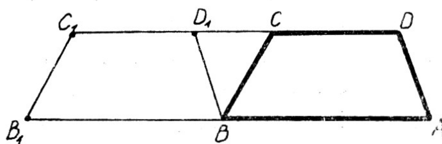
Kadangi pagal uždavinio sąlygą duotieji apskritimai kertasi, tai OO_1 yra daugiau už nulį ir mažiau už tų apskritimų spindulių sumą.



179 pav.



180 pav.



181 pav.

Visi nurodyti brėžiniai atliekami vienareikšmiškai (sąlygoje reikalaujama nubrėžti atkarpą, kurios vidurys sutaps su vienu iš apskritimų susikirtimo taškų), todėl uždavinys turi vienintelį sprendinį esant bet kokiems apskritimų spinduliams.

184. Atidedame tašką M_1, simetrišką taškui M (trikampio ABC pusiaukraštinių susikirtimo taškui) taško A_1 (kraštinės BC vidurio) atžvilgiu (180 pav.). Sujungiame jį su taškais B ir C. $MM_1 = {}^2/_3\ AA_1$, $MC = {}^2/_3\ CC_1$. Kadangi $MA_1 = A_1M_1$ ir $BA_1 = A_1C$, tai MBM_1C — lygiagretainis. Todėl $M_1C = BM = {}^2/_3\ BB_1$. Pirmiausia braižome trikampį MM_1C pagal tris kraštines. Taškas A simetriškas taškui M_1 taško M atžvilgiu, o taškas B — taškui C taško A_1 (atkarpos MM_1 vidurio) atžvilgiu. Trikampis ABC nubraižytas. Įrodymas akivaizdus. Ar turės uždavinys sprendinį, priklausys nuo to, ar galėsime nubraižyti trikampį MM_1C pagal tris kraštines, kiekviena iš kurių lygi ${}^2/_3$ vienos iš duotųjų atkarpų.

Įrodysime, kad iš pusiaukraštinių visada galima sudaryti trikampį. Kadangi AA_1, BB_1, CC_1 — pusiaukraštinės, tai $\overrightarrow{AA_1} = {}^1/_2\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = {}^1/_2\ (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA})$; $\overrightarrow{BB_1} = {}^1/_2\ (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = {}^1/_2\ (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB})$; $\overrightarrow{CC_1} = {}^1/_2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = {}^1/_2\ (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC})$. Vadinasi, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{0}$ ir egzistuoja trikampis, kurio kraštinės lygios AA_1, BB_1, CC_1. Todėl visada galima nubrėžti trikampį, kurio kraštinės lygios ${}^2/_3$ šių pusiaukraštinių ilgio.

Iš to išeina, kad duotasis uždavinys visada turi vienintelį sprendinį.

185. Jei ABCD — trapecija, kurios kraštinės lygios duotosioms atkarpoms, tai lygiagrečiuoju postūmiu vektoriumi $\overrightarrow{AB}$ ji bus atvaizduojama į trapeciją $BB_1C_1D_1$ (181 pav.). Yra žinomos trikampio BCD_1 trys kraštinės: BC ir BD_1 — duotosios atkarpos, o $CD_1 = AB - CD$, kur AB ir CD — taip pat duotos. Iš čia ir braižymo būdas: braižome trikampį BCD_1; atidedame $D_1D = AB$; braižome $AD \parallel BD_1$ ir $AB \parallel CD$. ABCD — ieškomoji trapecija.

Nesunku įrodyti, kad nubrėžta trapecija tenkina uždavinio sąlygą.

Jei didžiausios iš duotųjų keturių atkarpos ilgis didesnis arba lygus kitų trijų atkarpų ilgių sumai, tai uždavinys sprendinio neturi. Uždavinys neturės sprendinio ir tuo atveju, kai duotųjų atkarpų ilgiai lygūs tarpusavyje.

Pažymėsime $AB=a$, $CD=b$, $BC=c$, $AD=d$, $BD=m$.

Pagal kosinusų teoremą:

iš $\triangle ABD$: $d^2=a^2+m^2-2\,am\cos\angle ABD$;

iš $\triangle CDB$: $c^2=b^2+m^2-2\,bm\cos\angle CDB$.

Kadangi $\angle ABD=\angle CDB$, $\cos\angle ABD=\frac{a^2+m^2-d^2}{2am}$, $\cos\angle CDB=$ $=\frac{b^2+m^2-c^2}{2bm}$, tai $\frac{a^2+m^2-d^2}{2am}=\frac{b^2+m^2-c^2}{2bm}$;

$a^2b+bm^2-bd^2=ab^2+am^2-ac^2$; $m=\sqrt{\frac{a^2b-bd^2-ab^2+ac^2}{a-b}}$.

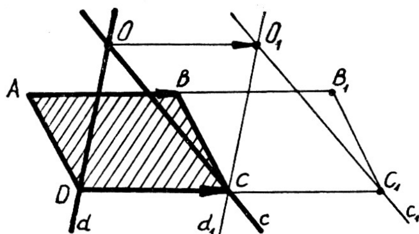
Jei pašaknio reiškinys teigiamas ir atkarpoms a, d, m ir b, c, m tenkinama trikampio nelygybė, tai uždavinys turi vienintelį sprendinį.

Pastaba. Uždavinio sąlygoje nenurodyta, kurios iš duotųjų atkarpų yra pagrindai, o kurios — šoninės kraštinės. Todėl reikia išnagrinėti šešis rinkinius po tris atkarpas kiekviename:

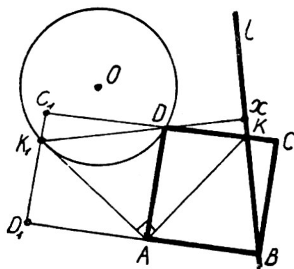
1) a, b, $|d-c|$;
2) a, c $|d-b|$;
3) a, d, $|c-b|$;
4) b, c, $|d-a|$;
5) b, d, $|c-a|$;
6) c, d, $|b-a|$.

Jei trys atkarpos kuriame nors rinkinyje gali būti trikampio kraštinėmis (joms tenkinama trikampio nelygybė), tai trapeciją su tokiomis kraštinėmis nubrėžti galima.

186. Tegul ABCD — ieškomasis lygiagretainis (182 pav.). Naudosime postūmį vektoriumi $\vec{AB}$. Tada tiesės c ir d bus atvaizduojamos į c_1 ir d_1, lygiagretainis ABCD — į BB_1C_1C. Taškas D yra tiesėje d, todėl jis turi būti atvaizduojamas į tašką tiesėje d_1. O taškas C yra tiesėje c. Vadinasi, taškas D atvaizduojamas į tiesių c ir d_1 susikirtimo tašką. Iš čia ir braižymo būdas: braižome tieses c_1 ir d_1 (lygiagretus postūmis vektoriumi $\vec{AB}$); per tiesių c ir d_1 susikirtimo tašką išvedame $CD \parallel AB$. ABCD — ieškomasis lygiagretainis: taškai C ir D yra atitinkamai tiesėse c ir d. $CD=$ $=AB$, $CD \parallel AB$. Jei taškai A ir B yra vienoje iš duotųjų tiesių, tai uždavinys sprendinio neturi.



182 pav.



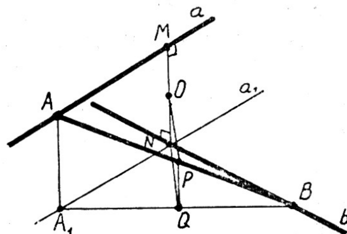
183 pav.

187. Tarkime, kad ABCD — ieškomasis kvadratas (183 pav.). Atlikime šio kvadrato ir duotosios tiesės l posūkį apie tašką A 90° kampu. Tada kvadratas bus atvaizduojamas į kvadratą ADC_1D_1, o tiesė l — į tiesę XD (įsitikinkite, kad $XD \perp l$). Taškas B tiesėje l bus atvaizduojamas į tašką tiesėje XD, ir kadangi $\angle BAD = 90°$, tai tuo tašku bus taškas D, priklausantis duotajam apskritimui. Pagal tai galima nubraižyti kvadrato kraštinę AD, vadinasi, ir visą kvadratą. Brėžimas: tiesėje l atidedame bet kokius du taškus, sujungiame juos su tašku A ir pasukame šias dvi atkarpas apie tašką A 90°; per atkarpų galus išvedame tiesę, kuri kerta apskritimą taške D; turėdami kraštinę AD, braižome kvadratą ABCD. Tai, kad taškas B bus tiesėje l, išplaukia iš to, kad, atlikus posūkį apie A 90° kampu, tiesė XD sutaps su l, o joje esantis taškas D bus atvaizduojamas į tašką B, nes $\angle DAB = 90°$.

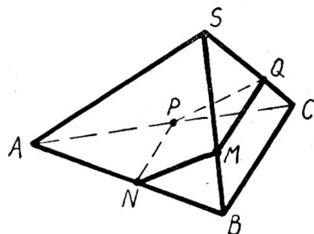
Kadangi pasukus duotąją tiesę apie tašką A 90° kampu taškas B pereina į tašką D, esantį apskritime, tai tiesė XD ir apskritimas turi turėti bendrų taškų. Priešingu atveju uždavinys sprendinio neturi.

Kadangi tiesė ir apskritimas gali turėti 0, 1 arba 2 bendrus taškus, tai priklausomai nuo duotųjų elementų išsidėstymo uždavinys turės 0, 1 arba 2 sprendinius.

188. Per duotąsias prasilenkiančias tieses išvesime lygiagrečias plokštumas α ir β (184 pav.). Šių prasilenkiančių tiesių bendro statmens ilgį (atstumas tarp α ir β) pažymėsime h, MN=h. Tegul MO=NO. Per tašką O išvesime plokštumą γ, lygiagrečią plokštumoms α ir β. Lengvai įrodoma (stačiųjų trikampių lygumas pagal smailųjį kampą ir statinį), kad atkarpų, kurių galai yra plokštumose α ir β, vidurio taškai yra plokštumoje γ. Jei P — atkarpos, kurios ilgis d ir galai yra tiesėse a ir b, vidurys, tai $PO \perp MN$ ($MN \perp \beta$, $\beta \parallel \gamma$). Tegul a_1 — tiesės a projekcija plokštumoje β, A_1B — atkarpos AB projekcija toje plokštumoje. Tada



184 pav.



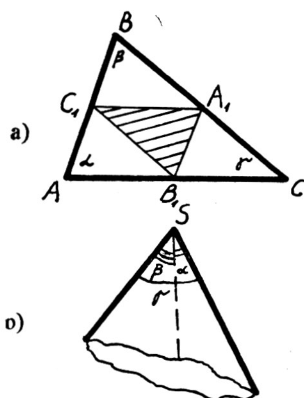
185 pav.

taškas Q bus taško P projekcija, $A_1Q=QB$. Kadangi $A_1B=$ $=\sqrt{AB^2-AA_1^2}=\sqrt{d^2-h^2}$, tai d ilgio atkarpos, kurių galai tiesėse a ir b, turės lygias projekcijas plokštumoje β (arba α). Todėl atstumai nuo šių projekcijų vidurio taškų iki taško N lygūs (stačiajame trikampyje A_1NB $A_1Q=QB=NQ$). Kadangi $PO=QN$, tai visų d ilgio atkarpų, kurių galai yra tiesėse a ir b, vidurio taškai yra vienoje plokštumoje ir vienodai nutolę nuo taško O toje plokštumoje. Iš to išplaukia, kad šių atkarpų vidurio taškai yra apskritime su centru O ir spinduliu $\frac{1}{2}\sqrt{d^2-h^2}$. Jei $d=h$, tai ieškomoji aibė — taškas O. Įsitikinkite, kad kiekvienas šio apskritimo taškas yra kurios nors ilgio d atkarpos su galais duotosiose tiesėse vidurys. Kai $d<h$, uždavinys sprendinių neturi.

189. Tegul MNPQ — vienas iš keturkampių, tenkinančių uždavinio sąlygą (185 pav.). Tada $AS\parallel MN$, $AS\parallel PQ$; vadinasi, $MN\parallel$ $\parallel PQ$. Analogiškai $BC\parallel MQ$ ir $BC\parallel NP$, todėl $MQ\parallel NP$. Vadinasi, MNPQ — lygiagretainis. Pažymėsime tetraedro briauną a, $MB=$ $=x$. Tada $SM=a-x$. Kadangi $\angle ABS=\angle BSC=60°$, tai $MN=MB=$ $=x$, $QM=SM=a-x$. Todėl $MN+MQ=a$ ir lygiagretainio MNPQ perimetras lygus 2a. Kadangi MNPQ — vienas iš tokių keturkampių, tai ir kitų keturkampių, tenkinančių uždavinio sąlygą, perimetras lygus 2a, t. y. visi jie turi vienodą perimetrą.

190. Pasinaudosime ankstesniojo uždavinio paveikslėliu, laikydami, kad taškai M, N, P, Q yra atitinkamų tetraedro briaunų vidurio taškai. MQ — trikampio SBC vidurio linija, todėl $MQ\parallel$ $\parallel BC$ ir $MQ=\frac{1}{2}BC$. Analogiškai $NP\parallel BC$ ir $NP=\frac{1}{2}BC$. Iš to išeina, kad MNPQ — lygiagretainis ir todėl $PM^2+NQ^2=2(MN^2+$ $+MQ^2)=2\left(\frac{1}{4}BC^2+\frac{1}{4}AS^2\right)$. Iš čia gauname, kad $BC^2+AS^2=$ $=2(PM^2+NQ^2)$, ką ir reikėjo įrodyti.

191. Trikampio ABC aukštinės statmenos atitinkamoms šio trikampio vidurio linijoms. Pasukus trikampį CA_1B_1 apie tiesę A_1B_1, viršūnė C atsidurs plokštumoje, statmenoje plokštumai ABC



186 pav.

ir tiesei A_1B_1 (186 pav., a). Tas pat atsitiks ir pasukus trikampius BA_1C_1 ir AB_1C_1 apie A_1C_1 ir B_1C_1. Šių trijų plokštumų susikirtimas yra tiesė l, kuri taip pat statmena plokštumai ABC. Tegul einanti per tašką B plokštuma, statmena A_1C_1, kerta A_1C_1 taške H, tiesė l kerta plokštumą ABC taške D — trikampio ABC aukštinių susikirtimo taške. Trikampis $A_1B_1C_1$ yra tetraedrų, su viršūnėmis tiesėje l, projekcija. Šios viršūnės projektuojasi į tašką D. Iš šių tetraedrų išsirinksime tą, kurio išklotinė yra trikampis ABC. Iš taško A_1 spinduliu A_1B padarysime atžymą tiesėje l. Gautas taškas E ir bus tetraedro viršūnė: $\triangle BA_1H=\triangle EA_1H$ (pagal įžambinę ir statinį), $\angle BA_1H=\angle EA_1H$. Todėl $\triangle A_1BC_1=$ $=\triangle A_1EC_1$ (pagal dvi kraštines ir kampą tarp jų). Analogiškai $\triangle B_1CA_1=\triangle B_1EA_1$, $\triangle B_1AC_1=\triangle B_1EC_1$. Iš čia išeina, kad trikampis ABC — tetraedro išklotinė.

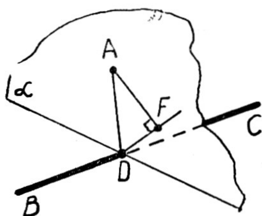
Išnagrinėjome atvejį, kai trikampis ABC — smailusis.

Jei išklotinėje būtų bukasis kampas, tai prie kiekvienos tetraedro viršūnės būtų plokščias bukasis kampas, kas neįmanoma (priešingu atveju visų tetraedro plokščiųjų kampų suma būtų didesnė už 720°, o kadangi kiekvienos tetraedro sienos plokščiųjų kampų sumą lygi 180°, tai visų plokščiųjų kampų suma lygi 720° — gavome prieštaravimą). Taigi, iš bukojo trikampio nurodytu būdu suklijuoti tetraedro negalima.

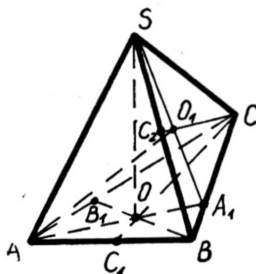
Analogiškai nagrinėjame, kai trikampis ABC — statusis — gauname, kad ir šiuo atveju suklijuoti tetraedro negalima.

Pastaba. Plokščiųjų kampų prie briaunainio viršūnės suma mažesnė už 360° (žr. [2], 57 p.). Ši sąlyga 186, b paveikslėlyje parodytai tetraedro viršūnei S yra tenkinama, nes $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Jei vienas iš trikampio ABC kampų, pavyzdžiui, γ, statusis, tai $\alpha+\beta=\gamma$ ir negauname trisienio kampo. Negausime trisienio kampo ir kai $\gamma>90°$, nes tada $\gamma>\alpha+\beta$. Taigi, sąlyga, kad α, β, γ — smailieji kampai, ir yra ta sąlyga, kurią tenkinant iš bet kokio trikampio nurodytu būdu galėsime suklijuoti tetraedrą.

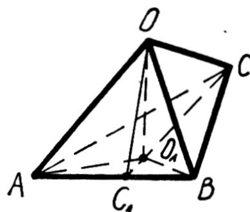
192. Išvesime $AD\perp BC$ ir per AD plokštumą α, statmeną BC (187 pav.). Nurodytų sąlygoje statmenų pagrindai yra plokštumoje α: jei F — vieno iš statmenų plokštumai β, einančiai per BC ir DF, pagrindas, tai DF yra plokštumoje β ir $BC\perp DF$, ir kadangi $BC\perp\alpha$, tai DF yra plokštumoje α. Kampas AFD statusis,



187 pav.



188 pav.



189 pav.

todėl taškas F yra apskritime su skersmeniu AD. Taškas A nepriklauso šiam apskritimui, kadangi jis ne statmens pagrindas. Taigi, ieškomoji aibė — apskritimas su skersmeniu AD, $AD \perp BC$, be taško A, esantis plokštumoje, statmenoje BC.

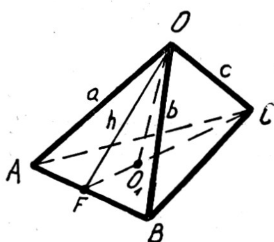
193. Tegul O — trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas ir SO — tetraedro aukštinė (188 pav.). Kadangi $OA_1 \perp BC$, $OC_1 \perp AB$, $OB_1 \perp AC$, tai pagal teoremą apie tris statmenis $SA_1 \perp BC$, $SC_1 \perp AB$, $SB_1 \perp AC$; $AS \perp BC$, $BS \perp AC$, $CS \perp AB$. Išvesime tetraedro aukštinę per viršūnę A. Kadangi $AS \perp BC$, tai ir AS projekcija į plokštumą SBC bus statmena BC. Bet $SA_1 \perp BC$. Iš to išeina, kad SA_1 — AS projekcija plokštumoje SBC ir todėl taškas A projektuojasi į SA_1. Lygiai taip pat įrodome, kad šios tetraedro aukštinės pagrindas yra trikampio SBC aukštinėje CC_2. Vadinasi, O_1 — sienos SBC aukštinių susikirtimo taškas ir tetraedro aukštinė AO_1 eina per tą tašką. Analogiškai uždavinio teiginys įrodomas ir aukštinėms, einančioms per tetraedro viršūnes B ir C.

194. Kadangi tetraedro aukštinė CO eina per sienos OAB aukštinių susikirtimo tašką O, tai pagal ankstesnįjį uždavinį, jei OO_1 — tetraedro aukštinė, tai O_1 — sienos ABC aukštinių susikirtimo taškas (189 pav.). $S_{OAB}=\frac{1}{2}AB\cdot OC_1$; $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CC_1$; $S_{O_1AB}=\frac{1}{2}AB\cdot O_1C_1$. Iš čia $OC_1=\frac{2}{AB}S_{OAB}$; $CC_1=\frac{2}{AB}S_{ABC}$; $O_1C_1=\frac{2}{AB}S_{O_1AB}$ (1). Kadangi $OC \perp OB$ ir $OC \perp OA$, tai OC statmena plokštumai OAB ir todėl $CO \perp OC_1$. Vadinasi, OO_1 — aukštinė, išvesta iš stataus trikampio COC_1 viršūnės prie stačiojo kampo, ir todėl $\frac{CC_1}{OC_1}=\frac{OC_1}{O_1C_1}$; $OC_1^2=CC_1\cdot O_1C_1$ (2). Įstatysime (1) į (2): $S_{OAB}^2=S_{ABC}\cdot S_{O_1AB}$. Iš to išeina, kad $S_{OAB}=\sqrt{S_{ABC}\cdot S_{O_1AB}}$, ką ir reikėjo įrodyti.

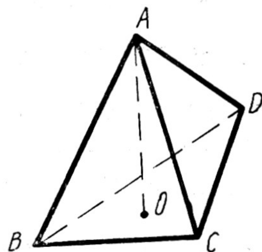
195. Pažymėsime AO=a, BO=b, CO=c (190 pav.). $S_{ABO}=\frac{1}{2}ab$; $S_{BCO}=\frac{1}{2}bc$; $S_{CAO}=\frac{1}{2}ac$; $S^2_{ABO}+S^2_{BCO}+S^2_{CAO}=\frac{1}{4}(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$ (1). Bet $S_{ABO}=\frac{1}{2}AB\cdot h$; $AB=\sqrt{a^2+b^2}$. Todėl $\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}h\sqrt{a^2+b^2}$; $h=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Pagal ankstesnįjį uždavinį $\angle COF=90°$, todėl $CF^2=OF^2+OC^2$; $CF=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2}=\frac{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CF=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$ (2). Iš (1) ir (2): $S^2_{ABO}+S^2_{BCO}+S^2_{CAO}=S^2_{ABC}$, ką ir reikėjo įrodyti.

196. Kadangi taškai A, B, C, D nėra vienoje plokštumoje, tai jokie trys iš jų nėra vienoje tiesėje. Braižome tetraedrą su viršūnėmis duotuosiuose taškuose (191 pav.). Bet kurį iš šių taškų galime laikyti tetraedro viršūne. Jei A — tetraedro viršūnė, AO — aukštinė, per AO vidurį išvesime plokštumą, lygiagrečią tetraedro pagrindui. Nesunku pastebėti, kad duotieji keturi taškai vienodai nutolę nuo tos plokštumos. Galima išvesti dar tris plokštumas su tokiomis savybėmis, laikant tetraedro viršūnėmis taškus B, C ir D. Briaunos AD ir BC, AC ir BD, AB ir CD yra prasilenkiančios tiesėse. Kiekvienai iš šių porų išvesime jų bendrą statmenį ir per jo vidurį išvesime plokštumą, lygiagrečią plokštumoms, kuriose yra tos tiesės ir lygiagrečiosioms tarpusavyje. Gausime dar tris plokštumas, nuo kurių vienodai nutolę duotieji taškai.



190 pav.



191 pav.

Taigi, uždavinio sąlygą tenkina septynios plokštumos.

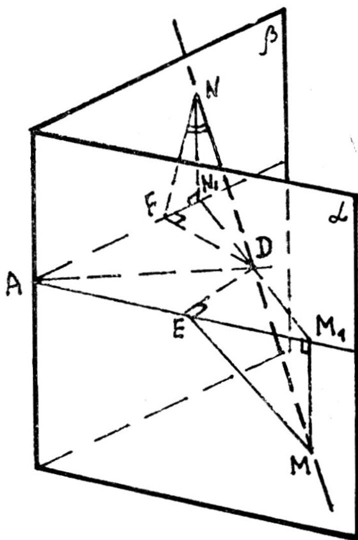
197. Duotosios tiesės ir dvisienio kampo sienų susikirtimo taškus pažymėsime M ir N (192 pav.). Per atkarpos MN vidurį D išvesime plokštumą, statmeną dvisienio kampo briaunai (ji bus statmena ir dvisienio kampo sienoms).

Taškų M ir N projekcijas į šią plokštumą pažymėsime M_1, N_1, o taško D projekcijas į duotojo dvisienio kampo sienas — E ir F.

Kampas EAF — šio dvisienio kampo tiesinis kampas. Kampas DME — kampas tarp tiesės MN ir plokštumos α, o kampas DNF — kampas tarp šios tiesės

ir plokštumos β. Kadangi $ND=DM$ ir $\angle NDN_1=\angle MDM_1$, tai $\triangle NDN_1=$ $=\triangle MDM_1$. Todėl $NN_1=MM_1$ ir $N_1D=M_1D$.

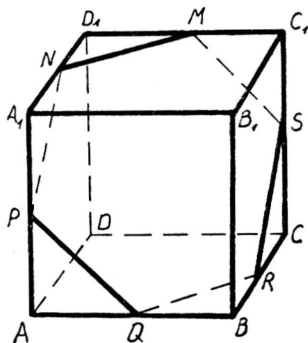
1) Jei $\angle DME=\angle DNF$, tai $\triangle DME=\triangle DNF$. Tada $DE=DF$ ir $ME=NF$. Iš to išeina, kad AD — kampo EAF pusiaukampinė ir $\triangle MM_1E=\triangle NN_1F$. Vadinasi, $EM_1=$ $=FN_1$. O kadangi $AE=AF$ (AD — pusiaukampinė), tai $AM_1=AN_1$. Bet AM_1 lygus taško M atstumui iki dvisienio kampo briaunos, o AN_1 — taško N atstumui iki tos briaunos. Iš to išeina, kad taškai M ir N vienodai nutolę nuo dvisienio kampo briaunos.



192 pav.

2) Dabar sakykime, kad taškai M ir N vienodai nutolę nuo dvisienio kampo briaunos. Tada $AM_1=AN_1$, trikampis M_1AN_1 lygiašonis ir pusiaukraštinė AD yra ir kampo M_1AN_1 pusiaukampinė. Todėl $DE=DF$, $\triangle MDE=\triangle NDF$. Iš čia gauname: $\angle DME=\angle DNF$, t. y. tiesė MN sudaro lygius kampus su dvisienio kampo sienomis.

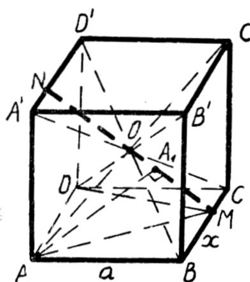
Teiginys įrodytas.



193 pav.

198. Pjūvis, einantis per viršūnes A, B_1, D_1, yra lygiakraštis trikampis (193 pav.). Jei kertančioji plokštuma lygiagreti vienai iš kubo sienų, tai pjūvis bus kvadratas. Pjūviai BA_1C_1 ir D_1AC — lygiakraščiai trikampiai, kurių plokštumos lygiagrečios, nes $A_1C_1 \parallel AC$ ir $A_1B \parallel CD_1$. Išvesime plokštumą, lygiagrečią šiems pjūviams ir vienodai nutolusią nuo jų. Gausime šešiakampį MNPQRS. Jo kraštinės lygios tarpusavyje, nes kiekviena jų lygi pusei kubo sienos įstrižainės. Visi šio šešiakampio kampai lygūs 120°, nes šių kampų kraštinės lygiagrečios lygiakraščio trikampio BA_1C_1 kraštinėms. Iš to išplaukia, kad šis šešiakampis taisyklingasis.

Kubas turi šešias sienas, todėl pjūvis negali turėti daugiau kaip šešių kraštinių. Bet koks penkiakampis pjūvis turės dvi ly-



194 pav.

giagrečias kraštines, todėl jis negalės būti taisyklingas penkiakampis.

199. Tegul MN — tiesė, einanti per kubo centrą, $AB=a$, $BM=x$, $OM=z$, $MC=a-x$ (194 pav.). Kadangi $AO=BO=CO=DO$ — kubo įstrižainių pusės, tai $AO=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Pažymėsime $\angle AOM=\varphi$, $\angle BOM=\alpha$, $\angle COM=\beta$, $\angle DOM=\gamma$.

Jei AA_1 — atstumas nuo viršūnės A iki tiesės MN, tai iš trikampio $AOA_1 : AA_1=AO\cdot\sin\varphi$. Analogiškai atstumai nuo viršūnių B, C, D iki tiesės MN atitinkamai lygūs: $BB_1=BO\sin\alpha$, $CC_1=CO\cdot\sin\beta$, $DD_1=DO\cdot\sin\gamma$. Kadangi O — kubo simetrijos centras, tai atstumai nuo viršūnių A^1, B^1, C^1, D^1 iki MN atitinkamai lygūs CC_1, DD_1, AA_1, BB_1. Todėl atstumų nuo viršūnių iki MN kvadratų suma bus lygi $2AA_1^2+2BB_1^2+2CC_1^2+2DD_1^2=2AO^2\cdot(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\varphi)$. Iš trikampio ABM: $AM^2=AB^2+BM^2=a^2+x^2$. Iš trikampio DCM: $DM^2=DC^2+CM^2=a^2+(a-x)^2$. Trikampiams AOM, BOM, COM, DOM pritaikysime kosinusų teoremą ir iš gautų lygybių rasime kampų kosinusus:

$$\cos\varphi=\frac{-a^2+4Z^2-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z};\quad \cos\alpha=\frac{3a^2+4Z^2-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z};$$

$$\cos\beta=\frac{-a^2+4Z^2+8ax-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z};\quad \cos\gamma=\frac{-5a^2+4Z^2+8ax-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z}.$$ Kadangi

$\sin^2\delta=1-\cos^2\delta$, tai $2AO^2\cdot(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\varphi)=2AO^2\cdot$

$$\cdot\left(\left(1-\left(\frac{3a^2+4Z^2-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z}\right)^2\right)+\left(1-\frac{-a^2+4Z^2+8ax-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z}\right)^2\right)+$$

$$+\left(1-\left(\frac{-5a^2+4Z^2+8ax-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z}\right)^2\right)+\left(1-\left(\frac{-a^2+4Z^2-4x^2}{4a\sqrt{3}\,Z}\right)^2\right)\Bigg)=$$

$=1/32Z^2\ (224a^2Z^2-36a^4-64Z^4-64x^4-160a^2x^2+128x^2Z^2+96a^3x-128axZ^2+128ax^3)$.

Iš trikampio OBM pagal kosinusų teoremą: $Z^2=\frac{3a^2}{4}+x^2-a\sqrt{3}x\cdot\cos(\angle OBM)$. Bet $\cos(\angle OBM)=\frac{BC}{2\cdot OB}=1/\sqrt{3}$. Todėl $Z^2=\frac{3}{4}a^2+x^2-ax$; $Z^4=9/16a^4+x^4+5/2a^2x^2-3/2a^3x-2ax^3$. Vadinasi, $2AA_1^2+2BB_1^2+2CC_1^2+2DD_1^2=1/32\cdot Z^2\cdot(168a^4+224a^2x^2-224a^3x-36a^4-36a^4-64x^4-160a^2x^2+96a^3x+128ax^3-64x^4-160a^2x^2+96a^2x^2+128x^4-128ax^3+96a^3x-96a^3x-128ax^3+128a^2x^2+128ax^3)=\frac{1}{32\cdot Z^2}\cdot(96a^4+128a^2x^2-128a^3x)=\frac{4a^2}{Z^2}\cdot(\frac{3}{4}a^2+x^2-ax)=4a^2$.

Skaičiavimai atlikti tiesei, kertančiai kubo briaunas. Jie išlieka teisingi ir tuo atveju, kai tiesė kerta kubo sienas (įsitikinkite tuo).

Kadangi duotajam kubui ši suma pastovi, tai ji nepriklauso nuo MN padėties.

Pastabos. 1) Jei α, β, γ — kampai, kuriuos sudaro bet kokia tiesė su trimis paporiui statmenomis tiesėmis, tai $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Jei imtume plokštumą, statmeną tiesei MN, tai kubo briaunų projekcijų į šią plokštumą kvadratų suma būtų lygi $4a^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=4a^2(3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma))=8a^2$.

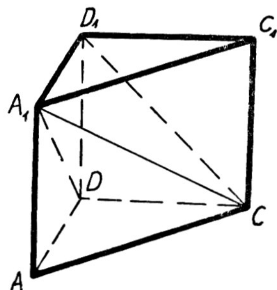
2) Nagrinėti atvejį, kai tiesė MN kerta, pavyzdžiui, sieną ABCD taške M, galima žemiau aprašytu būdu.

Pasirinkti tokią koordinačių sistemą, kad kubo viršūnė D sutaptų su koordinačių pradžia. Taško M koordinatės (x; y); kubo centro — O (a/2; a/2; a/2). Pažymėti kampus tarp AO, BO, CO, DO ir MN α, β, γ, δ; A_1, B_1, C_1, D_1 — statmenų, nuleistų iš viršūnių A, B, C, D į MN, pagrindai. Tada $AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2+DD_1^2=3a^2/4(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+\sin^2\delta)=3a^2/4(4-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta))$; $AM^2=(a-x)^2+y^2$; $BM^2=(a-x)^2+(a-y)^2$; $CM^2=x^2+(a-y)^2$; $DM^2=x^2+y^2$; $4\cdot OM^2=3a^2+4x^2+4y^2-4ax-4ay$.

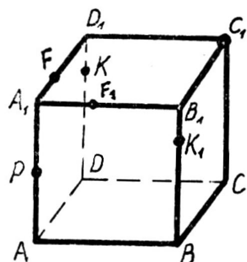
Pagal kosinusų teoremą iš $\triangle AOM$ ($\angle AOM=180^\circ-\alpha$) apskaičiuoti $\cos\alpha$, iš $\triangle BOM$ — $\cos\beta$, iš $\triangle COM$ — $\cos\gamma$, iš $\angle DOM$ — $\cos\delta$ ir įsitikinti, kad $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\cos^2\delta=4/3$. Atsižvelgti į tai, kad O — kubo simetrijos centras.

200. Perpjausime kubą plokštuma, einančia per priešingų sienų įstrižaines, ir parodysime, kaip pusę kubo padalinti į tris lygius tetraedrus. Tetraedrų A_1ACD, $A_1D_1CC_1$, A_1D_1CD pagrindai — lygūs statieji lygiašoniai trikampiai, o aukštinės lygios kubo briaunai ir eina per pagrindų viršūnes prie smailiųjų kampų (195 pav.). Todėl šie tetraedrai yra lygūs. Antrą kubo pusę taip pat galima padalinti į tris lygius tetraedrus. Vadinasi, mes padalinome kubą į šešis lygius tetraedrus.

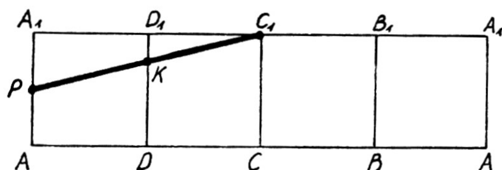
201. Tegul voras yra taške P, o musė — taške C_1 (196 pav., a). Perpjausime kubą per briauną AA_1 ir išnagrinėsime jo šoninio paviršiaus išklotinę. Kelias iš P į C_1 — atkarpa PC_1 (196 pav., b). Voras gali judėti taip: iš taško P į gretimos briaunos AA_1 tašką K (arba K_1), nutolusį nuo D_1 (atitinkamai B_1) per ketvirtį briaunos ilgio, o iš šio taško į C_1. Jei kubo briauna lygi a, tai kelio ilgis $\frac{a\sqrt{17}}{2}$. Voras gali judėti ir taip (196 pav., a): iš taško P į



195 pav.



a)



b)

196 pav.

tašką F (arba F_1), o iš F į C_1 (sienai $A_1B_1C_1D_1$ ir AA_1D_1D paskirstome vienoje plokštumoje; nubrėžiame atkarpą PC_1, kuri kerta A_1D_1 taške F) ir kelio ilgis $\frac{a\sqrt{13}}{2}$.

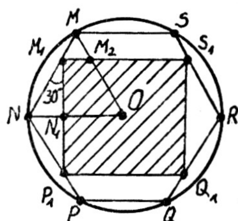
Kelias iš P į C_1 bus trumpiausias, jei išklotinėje bus vaizduojamas tiesios linijos atkarpa.

Trumpiausias kelias iš P į C_1: iš taško P į tašką F (arba F_1), $A_1F : FD_1 = 1 : 2$, o iš šio taško į C_1.

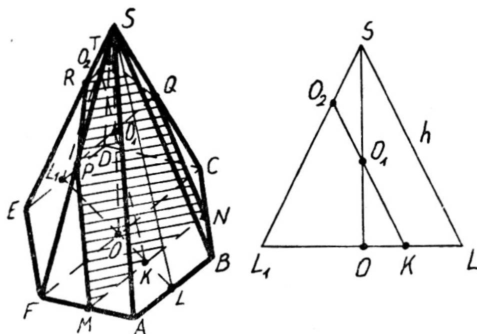
202. Pažymėsime duotojo kubo briauną a. Išvesime plokštumą, statmeną kubo įstrižainei, ir suprojektuosime į ją kubą (197 pav.). Jo projekcija bus taisyklingasis šešiakampis su kraštine $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Iš tikro kubo įstrižainė lygi $a\sqrt{3}$, todėl kampo tarp įstrižainės ir greta esančios briaunos kosinusas lygus $\frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Iš to išeina, kad kampo tarp briaunos ir plokštumos, statmenos įstrižainei, kosinusas lygus $\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, o šešiakampio kraštinė lygi $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Į šį šešiakampį MNPQRS įbrėšime kvadratą $M_1P_1Q_1S_1$, kaip parodyta 197 paveikslėlyje. Apskaičiuosime to kvadrato kraštinę. Pažymėsime $NM_1 = x$. Tada $MM_1 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - x$. Iš trikampio $NM_1N_1 : N_1M_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Todėl $M_1P_1 = x\sqrt{3}$ (1). Galima užrašyti ir kitaip: $M_1S_1 = M_1M_2 + M_2S_1$. Trikampis MM_1M_2 lygiakraštis, $M_1M_2 = M_1M$, ir $M_2S_1 = MS$. Todėl $M_1S_1 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - x + \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} =$
$= \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - x$ (2). Iš (1) ir (2): $x\sqrt{3} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - x$; $x = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}$.



197 pav.



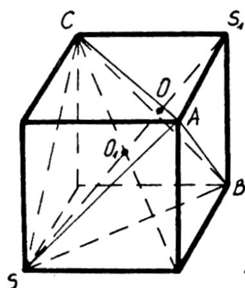
198 pav.

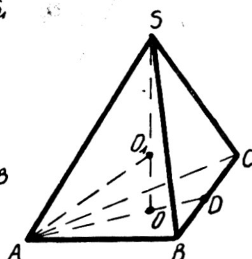
Vadinasi, $M_1P_1 = \frac{2a\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$. Palyginsime M_1P_1 su kubo briauna: $\frac{M_1P_1}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1) > 1$; $M_1P_1 > a$. Jei išpjautume kubo dalį, kuri projektuojasi į kvadratą $M_1P_1Q_1S_1$, tai pro gautą angą pralįstų šiek tiek didesnių matmenų kubas nei duotasis ($M_1P_1 > a$).

Jei kvadratinio pjūvio ašį nukreiptume pagal kubo įstrižainę, tai šešios kubo briaunos, besiprojektuojančios į taisyklingą šešiakampį, nebus paliestos ir kubas nesuskils į atskiras dalis.

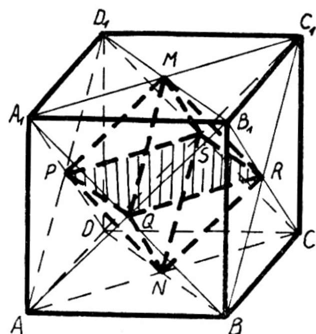
203. Trikampio ASB plotas lygus: $S = \frac{1}{2}AB \cdot SL$. Jei $AB = a$, $SL = h$, tai $a = \frac{2S}{h}$ (198 pav.). KO_1 — trikampio OSL vidurio linija, todėl $O_1K = \frac{1}{2}h$. $OL = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{S\sqrt{3}}{h}$; $OK = KL = \frac{1}{2}OL = \frac{S\sqrt{3}}{2h}$; $LL_1 = 2OL = \frac{2S\sqrt{3}}{h}$; $L_1K = LL_1 - KL = \frac{3S\sqrt{3}}{2h}$. Kadangi $\triangle SL_1L \sim \triangle O_2L_1K$, tai $\frac{L_1K}{L_1L} = \frac{KO_2}{LS}$; $KO_2 = \frac{3}{4}h$; $O_1O_2 = KO_2 - KO_1 = \frac{1}{4}h$. PQ—trikampio SFC vidurio linija, $PQ = \frac{1}{2}FC = \frac{2S}{h}$. MN — trapecijos AFCB vidurinė linija, todėl $MN = \frac{3S}{h}$. $\triangle SL_1L \sim \triangle O_2L_1K$, todėl $\frac{L_1O_2}{L_1S} = \frac{KO_2}{LS}$; $L_1O_2 = \frac{3}{4}h$; $O_2S = L_1S - L_1O_2 = \frac{1}{4}h$. $\triangle ESL_1 \sim \triangle RSO_2$, todėl $\frac{RO_2}{EL_1} = \frac{SO_2}{SL_1}$; $RO_2 = \frac{S}{4h}$; $RT = 2 \cdot RO_2 = \frac{S}{2h}$. Ieškomasis pjūvio plotas lygus dviejų trapecijų plotų sumai (įrodykite, kad MPQN ir PRTQ — trapecijos).

$$S_{pj.} = S_{MPQN} + S_{PRTQ} = \frac{\frac{2S}{h} + \frac{3S}{h}}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{\frac{2S}{h} + \frac{S}{2h}}{2} \cdot \frac{h}{4} = \frac{25}{16}S.$$





199 pav.



200 pav.

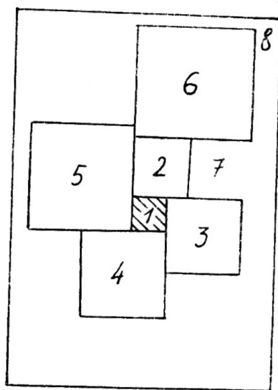
204. Pirmiausia padėsime tetraedrą pagrindu į dėžutės dugną. Tada $SO=1$, ir jei $AS=AB=z$, tai $AD=\frac{z\sqrt{3}}{2}$; $AO=\frac{2}{3}AD=\frac{z\sqrt{3}}{3}$ (199 pav.). Iš trikampio AOS: $z=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Dabar rasime tokią tetraedro padėtį kube, kad šio taisyklingo tetraedro briauna būtų didžiausia.

Apie kubą apibrėšime sferą, kurios spindulys $SO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Mūsų tetraedras, esantis kube, bus ir sferoje. Jo briauna bus didžiausia, jei tetraedras bus įbrėžtas į sferą. Surasime tokio tetraedro briauną. Pažymėsime $AB=x$. Tada $AO=\frac{x\sqrt{3}}{3}$; $SO=\frac{x\sqrt{6}}{3}$; $OO_1=$ $=SO-SO_1=\frac{x\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Iš trikampio AOO_1: $AO_1^2=OO_1^2+AO^2$;

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(\frac{x\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2$; $x=\sqrt{2}$; $AB=AS=\sqrt{2}$. $SO=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ mažiau už sferos skersmenį — kubo įstrižainę. Parodysime, kad tetraedro pagrindas — trikampis ABC — yra ne tik sferos viduje, bet ir kubo viduje. Stačiuosiuose trikampiuose SS_1A, SS_1B, SS_1C atkarpos AO, BO, CO yra statmenys, išvesti iš viršūnės prie stataus kampo į įžambinę. Todėl SO statmena plokštumai ABC. O kadangi $AB=BC=AC=\sqrt{2}$ ir $AS=BS=CS=\sqrt{2}$, tai tetraedras $SABC$ turi didžiausią iš visų galimų briauną ir yra duotajame kube.

205. Šių dviejų taisyklingų tetraedrų briaunos yra kubo sienų įstrižainės, todėl jų susikirtimo taškai — kvadratų centrai (200 pav.). Atstumai tarp kvadratų, esančių gretimose sienose, centrų lygūs pusei kubo sienos įstrižainės, todėl $MP=MQ=MR=$

$= MS = NP = NQ = NR = NS = PQ = QR =$ $= RS = SP$. Jei kubo briauna lygi a, tai $MP = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gautasis briaunainis apribotas aštuoniais lygiakraščiais trikampiais, kiekvienoje viršūnėje yra keturių trikampių viršūnės. Iš to išplaukia, kad gavome taisyklingą oktaedrą.



201 pav.

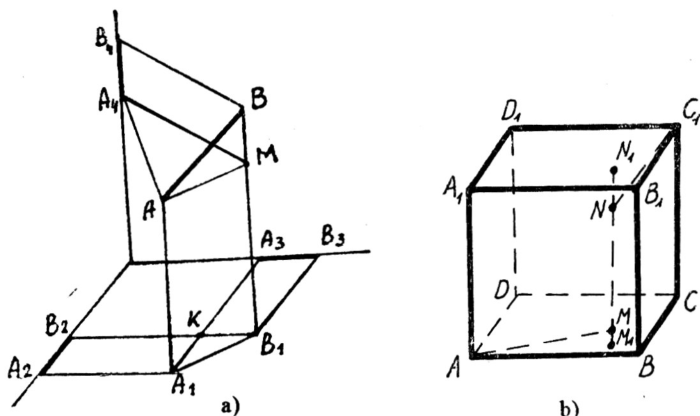
Pastaba. Rekomenduojame įsitikinti, kad oktaedro briaunos yra plokštumų, kuriose yra atitinkamos tetraedrų sienos, sankirtos tiesių atkarpos.

206. Kad būtų paprasčiau, vietoje kubų braižome kvadratus (201 pav.). Pasirinksime vieną stačiakampio gretasienio sieną ir surasime patį mažiausią kubą, esantį prie šios sienos (jų yra baigtinis skaičius, todėl toks egzistuoja). Tegul tai bus kubas 1. Dedant aplink šį kubą paporiui skirtingus kubus, priklausomai nuo stačiakampio gretasienio matmenų ir kubo 1 padėties, gausime situaciją, kai negalėsime nieko padėti juostoje 8 prie stačiakampio gretasienio briaunos (kubas 1 — mažiausias) arba negalėsime užpildyti kubais erdvės 7 (kitaip būtų dar vienas kubas su briauna, lygia kubo 2 briaunai). Kadangi ši siena negali būti uždengta kubais, tai iš šių kubų negalima sudėti ir stačiakampio gretasienio. Pažymėsime, kad uždavinio sprendimui stačiakampio gretasienio matmenys įtakos neturi.

207. Suprojektuosime duotąją laužtę į tris kubo briaunas, einančias per vieną viršūnę. Kadangi bet kokia plokštuma, lygiagreti kubo sienoms, kerta laužtę ne daugiau kaip viename taške, tai laužtės atkarpų projekcijos kiekvienoje kubo briaunoje neturės bendrų vidinių taškų. Jei pažymėsime laužtės i-tosios atkarpos, turinčios ilgį l_i, projekcijų ilgius x_i, y_i, z_i, o laužtės atkarpų skaičių n, tai $x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1$, $y_1 + y_2 + \ldots + y_n < 1$, $z_1 + z_2 + \ldots + z_n < 1$.

Sakykime, $AB = l_i$, $A_2B_2 = x_i$, $A_3B_3 = y_i$, $A_4B_4 = z_i$ (202 pav., a). Kadangi kiekviena trikampio kraštinė yra mažesnė už kitų dviejų sumą, tai $A_1B_1 < A_1K + B_1K = x_i + y_i$, $AB < AM + BM = A_1B_1 + A_4B_4 < x_i + y_i + z_i$. Todėl laužtės ilgis $L = l_1 + l_2 + \ldots + l_n < (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n) + (z_1 + z_2 + \ldots + z_n) < 1 + 1 + 1 = 3$; $L < 3$. Dabar nubraižysime tenkinančią uždavinio sąlygą laužtę, kurios ilgis kiek galima mažiau skiriasi nuo 3 cm.

Laužtės ABB_1C_1 ilgis yra 3 cm (202 pav., b). Jei pasirinksime $M_1N_1 \| BB_1$ ir taškus M ir N tiesėje M_1N_1 arti prie M_1 ir N_1, tai



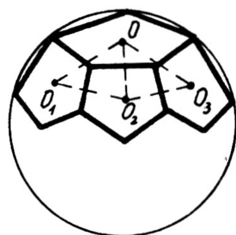
202 pav.

laužtės $AMNC_1$, tenkinančios uždavinio sąlygą, ilgis, kai $M_1 \to B$, $N_1 \to B_1$, $M \to M_1$, $N \to N_1$, artės prie 3 cm.

208. Suprojektuosime duotąjį briaunainį į plokštumą, nestatmeną nei vienai jo sienai. Tada visos sienos susiprojektuos į daugiakampius. Briaunainio briaunos, besiprojektuojančios į daugiakampio kraštines, esančias projekcijos kraštuose, dalina briaunainį į dvi dalis. Išnagrinėsime vienos iš šių dalių projekciją į mūsų parinktą plokštumą. Pažymėsime $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — tos dalies sienų briaunų skaičius, B_1 — tos dalies vidinių viršūnių skaičius, B^1 — projekcijos krašto viršūnių skaičius. Daugiakampių, į kuriuos padalintas projekcijos daugiakampis, kampų suma iš vienos pusės lygi $\pi(n_1-2)+\pi(n_2-2)+\ldots+\pi(n_k-2)$, o iš kitos — $\pi(B^1-2)+2\pi B_1$. Vadinasi, $(n_1+n_2+\ldots+n_k)-2k=B^1-2+$ $+2B_1$. Užrašius analogišką lygybę antrajai briaunainio daliai ir sudėjus abi lygybes, gausime $2B-2P+2G=4$, kur B — viršūnių skaičius, P — briaunų skaičius, G — sienų skaičius. Iš čia $B-$ $-P+G=2$.

209. Taisyklingas dodekaedras sudarytas iš dvylikos taisyklingų penkiakampių, prie kiekvienos viršūnės yra trys penkiakampiai. Dvisieniai kampai tarp plokštumų, kuriose yra gretimi penkiakampiai, lygūs tarpusavyje. Todėl atstumai tarp penkiakampių taškų (jų centrų), vienodai nutolusių nuo dvisienio kampo briaunos, lygūs tarpusavyje, t. y. $OO_1=O_1O_2=OO_2=O_2O_3$ ir t. t. (203 pav.). Kiekvienas penkiakampis turi penkis gretimus penkiakampius, vadinasi, į viršūnę O (arba į bet kurią kitą) sueina penkios atkarpos ir penki lygiakraščiai trikampiai. Kadangi viršūnių bus tiek, kiek dodekaedras turi sienų, t. y. dvylika, tai naujasis briau-

nainis, kurį mes braižome, turės dvylika viršūnių, prie kiekvienos iš jų bus po penkis lygiakraščius trikampius. Gauname taisyklingąjį ikosaedrą. Taisyklingasis dodekaedras turi simetrijos centrą, kuris bus ir ikosaedro simetrijos centras.



203 pav.

210. Taisyklingasis ikosaedras sudarytas iš dvidešimties taisyklingųjų trikampių. Prie kiekvienos viršūnės yra po penkis trikampius (204 pav.). Gretimų trikampių centrai yra vienodai nutolę nuo jų bendros kraštinės ir kadangi dvisieniai kampai, sudaryti iš plokštumų, kuriose yra tie trikampiai, lygūs, tai atstumai tarp gretimų trikampių centrų lygūs tarpusavyje. Sujungus atkarpomis ikosaedro sienų, turinčių bendrą briauną, centrus, gausime briaunainį, turintį tiek viršūnių, kiek ikosaedras turi sienų, t. y. dvidešimt. Prie kiekvienos viršūnės bus trys lygūs taisyklingieji penkiakampiai. Vadinasi, gauname taisyklingąjį dodekaedrą. Ikosaedro simetrijos centras yra ir dodekaedro simetrijos centras.



204 pav.

Tiesė vadinama duotosios figūros n-tojo laipsnio sukimosi ašimi, jei pasukus figūrą kampu $\frac{2\pi}{n}$, ji atvaizduojama pati į save. Tiesės, einančios per ikosaedro viršūnių poras (ir jo simetrijos centrą), yra 5-tojo laipsnio simetrijos ašys (tokių ašių yra šešios). Sukant ikosaedrą apie tokią tiesę, sienų centrai (penkiakampio viršūnės) bus atvaizduojami vienas į kitą, todėl šie penkiakampiai — plokščiosios figūros.

Pastabos. 1) Dviejų paskutinių uždavinių brėžiniai yra tik fragmentiški, tačiau juos nesunku papildyti.

2) Briaunainiai, gaunami vienas iš kito dviejuose paskutiniuose uždaviniuose nurodytu būdu, vadinami dualiniais. Vadinasi, mes įrodėme, kad taisyklingi dodekaedras ir ikosaedras vienas kitam dualiniai. Rekomenduojama įsitikinti, kad kubas ir oktaedras taip pat vienas kitam dualiniai.

3) Kiekvienam taisyklingam daugiasieniui egzistuoja apibrėžta sfera (eina per visas jo viršūnes) ir įbrėžta sfera (liečia visas jo sienas) (įrodymui išvesti per sienų centrus statmenis joms, išnagrinėti pjūvį, einantį per dviejų gretimų sienų centrus ir jų bendros briaunos vidurį, ir parodyti, kad visi šie statmenys turi bendrą tašką). Šių sferų centras ir bus daugiasienio simetrijos centras.

205 pav.

206 pav.

207 pav.

211. Išvesime CD‖AB. Kampas tarp tiesių AB ir SC lygus kampui tarp SC ir CD, t. y. φ (205 pav.). Apskaičiuosime φ. Kadangi $\angle BAC = \angle ACD = 60°$, tai išvedus $AD \perp CD$, gauname: $\angle CAD = 30°$. Todėl $CD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$. Iš $\triangle CAS : CS = a\sqrt{2}$.

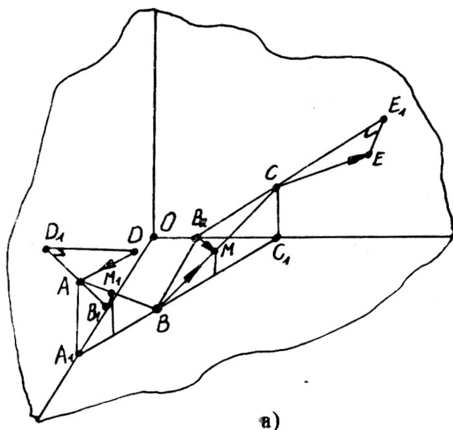
Iš trikampio $CSD : \cos\varphi = \frac{CD}{CS} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$. Dabar apskaičiuosime atstumą tarp tiesių AB ir SC. Kadangi AB‖CD ir CD yra plokštumoje CSD, tai atstumas tarp AB ir CD lygus atstumui tarp AB ir plokštumos CSD. Išvesime $AF \perp SD$. Tai ir bus ieškomasis atstumas (įrodykite). Iš trikampio $ACD : AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Iš trikampio $ASD : SD = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Dviem būdais skaičiuojant trikampio ASD plotą, gauname: $AS \cdot AD = AF \cdot SD$. Iš čia $AF = \frac{AS \cdot AD}{SD} = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

212. Iš trikampio ACE (206 pav.): $AE = a\sqrt{3}$. Iš trikampio $ABD : AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Išvesime DF‖BC; $DF = a$; $DF \perp EC$ $(BC \perp EC)$. $EF = EC - FC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Iš trikampio $EDF : ED = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Kadangi $AE^2 = 3a^2$, $AD^2 = ED^2 = \frac{3}{2}a^2$, tai $AE^2 = AD^2 + ED^2$ ir pagal teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremai, trikampis ADE statusis. Dabar surasime kampą tarp plokštumų ABC ir ADE. Šios plokštumos kertasi tiesėje AK, kur K — tiesių DE ir BC susikirtimo taškas. BD — trikampio ECK vidurio linija, todėl $KC = 2a$. Iš trikampio ACK pagal kosinusų teoremą gauname: $AK = a\sqrt{3}$. Vadinasi, trikampis ACK statusis, $\angle CAK = 90°$. Todėl ieškomasis kampas tarp plokštumų ABC ir ADE yra kampas CAE. Iš trikampio $ACE : \cos\varphi = \frac{AC}{AE} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

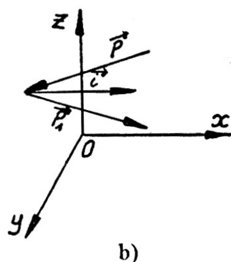
213. Pasirinksime vektorius $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, kaip parodyta 207 paveikslėlyje, ir per juos išvesime stačiakampio gretasienio įstrižaines. $\vec{BD_1}=-\vec{b}+\vec{a}+\vec{c}$; $\vec{DB_1}=-\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}$; $\vec{AC_1}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}$; $\vec{CA_1}=-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}$. Tada $\vec{BD}_1^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{a}\,\vec{b}-2\vec{b}\,\vec{c}+2\vec{a}\,\vec{c}$; $\vec{DB}_1^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-2\vec{b}\,\vec{c}-2\vec{a}\,\vec{c}+2\vec{a}\,\vec{b}$; $\vec{AC}_1^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\,\vec{b}+2\vec{a}\,\vec{c}+2\vec{b}\,\vec{c}$; $\vec{CA}_1^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{b}\,\vec{c}-2\vec{a}\,\vec{c}-2\vec{a}\,\vec{b}$. Sudėsime šias keturias lygybes: $\vec{BD}_1^2+\vec{DB}_1^2+\vec{AC}_1^2+\vec{CA}_1^2=4\vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{c}^2$. Kadangi vektoriaus kvadratas lygus jo ilgio kvadratui, tai $\vec{BD}_1^2+\vec{DB}_1^2+\vec{AC}_1^2+\vec{CA}_1^2=BD_1^2+DB_1^2+AC_1^2+CA_4^2=4AA_1^2+4AB^2+4AD^2=(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2+DD_1^2)+(AB^2+DC^2+D_1C_1^2+A_1B_1^2)+(AD^2+BC^2+B_1C_1^2+A_1D_1^2)$, tą ir reikėjo įrodyti.

214. **Pirmas būdas.** Pažymėsime krentančius ir atsispindėjusius spindulius DA, AB, BC, CE (208 pav., a) Atsižvelgsime į tai, kad atspindžio kampas lygus kritimo kampui ir kad krentantis ir atsispindėjęs spindulys bei statmuo plokštumai, išvestas iš spindulio kritimo taško, yra vienoje plokštumoje.

Jei krentantis spindulys DA lygiagretus vienai iš sienų, tai ir atsispindėjęs spindulys bus lygiagretus tai sienai ir mes gausime šio uždavinio planimetrinį atvejį, išnagrinėtą [1] (72 psl.). Bendru atveju tegul $AD_1=AB_1$ ir $CE_1=CB_2$. Tada $DD_1=BB_1$ ir $EE_1=BB_2$. Todėl, jei M — BC vidurys ir M_1 — AB vidurys, tai $\vec{B_2M}=\frac{1}{2}\vec{CE}$ ir $\vec{M_1B_1}=\frac{1}{2}\vec{DA}$ (*). Pažymėsime $\vec{OB_1}=\vec{x}$, $\vec{OB_2}=$



a)



b)

208 pav.

$=\vec{y}$, $\overrightarrow{A_1A}=\vec{z}$. Tada $\overrightarrow{M_1B_1}=\overrightarrow{M_1B}+\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\vec{y}$ (1); $\overrightarrow{B_2M}=\overrightarrow{B_2B}+$ $+\overrightarrow{BM}=\vec{x}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ (2). Statieji trikampiai B_1A_1B ir B_2BC_1 panašūs, todėl $\frac{B_1B}{B_2C_1}=\frac{A_1B}{BC_1}=m$, $m>0$. Statieji trikampiai AA_1B ir CC_1B taip pat panašūs ir todėl $\frac{A_1B}{BC_1}=\frac{A_1A}{C_1C}=m$. Vadinasi, $\frac{C_1C}{A_1A}=\frac{1}{m}$; $\overrightarrow{C_1C}=\frac{1}{m}\overrightarrow{A_1A}=\frac{1}{m}\vec{z}$; $\overrightarrow{B_2C_1}=\frac{1}{m}\vec{y}$; $\overrightarrow{A_1B_1}=-m\vec{x}$. Todėl $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BB_2}+$ $+\overrightarrow{B_2C_1}+\overrightarrow{C_1C}=-\vec{x}+\frac{1}{m}\vec{y}+\frac{1}{m}\vec{z}$ (3); $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1B}=-\vec{z}-$ $-m\vec{x}+\vec{y}$ (4). Įstatysime (4) ir (3) į (1) ir (2): $\overrightarrow{M_1B_1}=-\frac{1}{2}(m\vec{x}+$ $+\vec{y}+\vec{z})$; $\overrightarrow{B_2M}=\frac{1}{2}(\vec{x}+\frac{1}{m}\vec{y}+\frac{1}{m}\vec{z})$. Iš to išeina, kad $\overrightarrow{M_1B_1}=-m\,\overrightarrow{B_2M}$.

Iš čia, įskaitant (*): vektoriai $\overrightarrow{CE}$ ir $\overrightarrow{DA}$ kolinearūs ir priešingų krypčių.

Antras būdas. Taikysime koordinačių metodą. Jei $\vec{p}\,\{x;\ y;\ z\}$ — spindulio, krentančio į koordinatinę plokštumą YOZ, vektorius, o $\vec{p_1}\,\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ — atsispindėjusio spindulio vektorius (tarkime, kad $|\vec{p}|=|\vec{p_1}|$), tai $x_1=-x$, $y_1=y$, $z_1=z$ (208 pav., b). Tai lengva įrodyti, atsižvelgiant į tai, kad $(\vec{p}+\vec{p_1})\perp\vec{i}$ ir $(\vec{p_1}-\vec{p})\parallel\vec{i}$. Iš pirmos sąlygos gauname: $(x+x_1)\cdot 1+(y+y_1)\cdot 0+(z+z_1)\cdot 0=0$, t. y. $x_1=-x$. Iš sąlygos $\overrightarrow{\{x_1-x;\ y_1-y;\ z_1-z\}}\parallel\overrightarrow{\{1;\ 0;\ 0\}}$ gauname $y_1=y$, $z_1=z$. Analogiškai gauname krentančio ir atsispindėjusio spindulio vektorių koordinačių sąryšius ir kitoms koordinatinėms plokštumoms.

Koordinačių sistemą pasirinkime taip, kad duotojo tetraedro viršūnės turėtų koordinates: O (0; 0; 0), A (a; 0; 0), B (0; b; 0), C (0; 0; c). Tegul $\vec{p}\,\{x;\ y;\ z\}$ — krentančio spindulio vektorius. Po atspindžio nuo sienos OBC, $OBC\perp\vec{i}$, gausime vektorių $\vec{p_1}\,\{-x;\ y;\ z\}$. Toliau, po atspindžio nuo sienos OAC, $OAC\perp\vec{j}$, gausime vektorių $\vec{p_2}\,\{-x;\ -y;\ z\}$. Ir pagaliau po šio vektoriaus atspindžio nuo sienos OAB, $OAB\perp\vec{h}$, gauname atsispindėjusio spindulio vektorių $\vec{p_3}\,\{-x;\ -y;\ -z\}$. (Laikome, kad $|\vec{p}|=$ $=|\vec{p_1}|=|\vec{p_2}|=|\vec{p_3}|$). Taigi, $\vec{p_3}=-\vec{p}$.

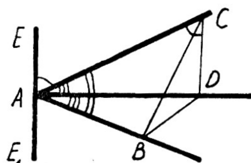
Pastaba. Antrą būdą rekomendavo autoriui L. Atanasianas.

215. Atidėsime AC=1. Tada iš trikampio ACD: $AD=CD=\frac{\sqrt{2}}{2}$; iš trikampio ACB: $AB=\frac{1}{2}$; $CB=\frac{\sqrt{3}}{2}$, jei $CD\perp AD, CB\perp AB$ (209 pav.) Iš trikampio ABD pagal kosinusų teoremą: $BD^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-$ $-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$; $BD=\frac{1}{2}$. Iš trikampio BCD pagal teoremą, atvirkščią Pitagoro teoremai, gauname, kad $\angle CDB=90°$. Iš to išeina, kad $CD\|AE$, $\angle CAE=\angle ACD=45°$. Jei imtume spindulį AE_1, statmeną plokštumai ABD, tai akivaizdu, kad $\angle CAE_1=135°$.

Pastaba. Reikėtų įrodyti tą faktą, kad taško C projekcija į plokštumą ABD sutampa su tašku D: teigti, kad taško C projekcija nėra tiesėje BD, nubrėžti atitinkamą brėžinį.

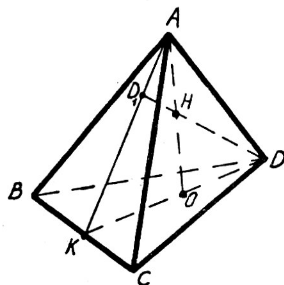
216. Jei tetraedro ABCD aukštinės kertasi taške H, tai atkarpa DH statmena plokštumai ABC. Todėl $DH\perp BC$ (210 pav.). Analogiškai ir $AH\perp BC$. Vadinasi, plokštuma DAH statmena BC ir todėl briaunos AD ir BC statmenos tarpusavyje.

Atvirkščiai, tegul priešingos tetraedro briaunos paporiui statmenos. Per briauną AD išvesime plokštumą, statmeną BC. Įrodysime, kad tetraedro aukštinės, išvestos iš viršūnių A ir D, yra toje plokštumoje. Tegul briauna BC kerta tą plokštumą taške K. Trikampio ADK aukštinė DD_1 statmena BC ir AK. Iš to išeina, kad DD_1 — tetraedro aukštinė. Vadinasi, bet kurios dvi tetraedro aukštinės kertasi. O todėl ir visos keturios tetraedro aukštinės kertasi viename taške.



209 pav.

Iš tikrųjų, jei kažkiek tiesių turi tokią savybę, kad bet kurios dvi iš jų kertasi, tai arba visos jos eina per vieną bendrą tašką, arba visos yra vienoje plokštumoje. Įrodysime tai. Jei tiesės eina per bendrą tašką, tai teiginys įrodytas. Sakykime, kad tiesės a_1, a_2, a_3 neturi bendro taško. Per tieses a_1 ir a_2 išvesime plokštumą α (tai galima atlikti). Tiesė a_3 ir α turi du bendrus taškus — susikirtimo su a_1 ir su a_2 taškus. Todėl a_3 yra plokštumoje α. Bet kokia kita tiesė a_4 taip pat yra toje plokštumoje, kadangi ji su kiekviena iš tiesių a_1, a_2, a_3 turi bendrą tašką. Tarp šių trijų taškų atsiras bent du skirtingi (priešingu atveju tiesės a_1, a_2, a_3 kirstųsi viename



210 pav.

taške, kas prieštarauja mūsų teiginiui). Todėl tiesė a_4 su plokštuma α turi turėti mažiausiai du bendrus taškus, ir todėl turi būti plokštumoje α.

Jokios trys tetraedro aukštinės nėra vienoje plokštumoje, kadangi priešingu atveju trys tetraedro briaunos bus statmenos tai plokštumai, t. y. tarpusavyje lygiagrečios, ko negali būti.

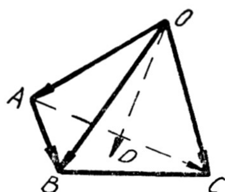
Taigi, tetraedro aukštinės paporiui susikerta, bet jokios trys iš jų nėra vienoje plokštumoje. Pagal ankstesnįjį įrodymą, visos jos eina per vieną bendrą tašką.

Pastaba. Tetraedras, kurio aukštinės kertasi viename taške, vadinamas ortocentrišku. Rekomenduojame įrodyti, kad būtina ir pakankama ortocentriškumo sąlyga, be įrodytos, yra: 1) viena tetraedro aukštinė eina per pagrindo aukštinių susikirtimo tašką; 2) prasilenkiančių briaunų kvadratų sumos lygios; 3) atkarpos, jungiančios prasilenkiančių briaunų vidurius, lygios; 4) priešingų dvisienių kampų kosinusų sandaugos lygios; 5) kampai tarp priešingų briaunų lygūs.

217. Tegul vektorius $\overrightarrow{OD}$ sudaro lygius kampus su vektoriais $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ (211 pav.). Pagal sąlygą $OA=OB=OC$. Įrodysime, kad vektorius $\overrightarrow{OD}$ statmenas vektoriams $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{AC}$. Pagal skaliarinės sandaugos apibrėžimą: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=OA\cdot OD\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{OA}\,\overrightarrow{OD}})$; $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=OB\cdot OD\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{OB}\,\overrightarrow{OD}})$; $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=OC\cdot OD\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OD}})$. Iš čia $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$. Kadangi $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, tai $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=0$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$. Iš to išeina, kad OD statmenas plokštumai ABC.

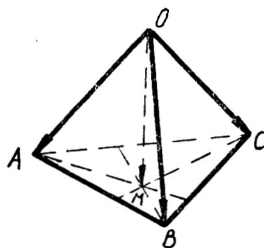
218. Pasirinksime vektorius, kaip parodyta 212 paveikslėlyje. Iš uždavinio sąlygos: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}$; $\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM}$. Iš to, įskaitant tai, kad OM statmenas plokštumai ABC, gauname: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM})\cdot(-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=0$; $\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{AB}=(-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OM})\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=0$; $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=(-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM})\cdot(-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=0$. Vadinasi, M — trikampio aukštinių susikirtimo taškas.

Pastaba. Kadangi OA⊥OB ir OA⊥OC, tai OA statmena plokštumai OBC, t. y. tetraedro aukštinė. Taškas O — trikampio BOC aukštinių susikirtimo taškas. Remiantis 193 uždavinio įrodymu, jei OM — tetraedro aukštinė, tai M — trikampio ABC aukštinių susikirtimo taškas.



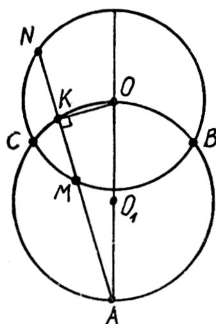
211 pav.

219. Nubraižysime tetraedrą, kurio šoninės briaunos — duotosios stygos. Papildysime šį tetraedrą iki stačiakampio gretasienio.



212 pav.

Gretasienio įstrižainės vidurys yra jo simetrijos centras. Keturios šio gretasienio viršūnės — duotųjų stygų galai — pagal sąlygą priklauso sferai. Simetriški jiems sferos centro atžvilgiu taškai priklauso tai sferai. Kadangi pagal tris briaunas prie vienos viršūnės galima nubrėžti tik vieną stačiakampį gretasienį, o apie jį apibrėžti tik vieną sferą, tai duotosios sferos centras sutampa su gretasienio įstrižainės viduriu. Duotųjų stygų kvadratų suma pagal stačiakampio gretasienio savybę, lygi jo įstrižainės, kuri yra ir sferos skersmuo, kvadratui. Iš to išeina, kad stygų ilgių kvadratų suma yra pastovus dydis ir nepriklauso nuo tų stygų padėties.



213 pav.

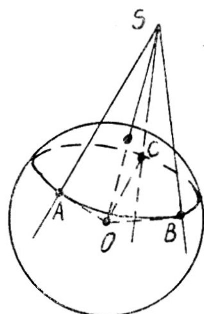
220. Per rutulio centrą išvesime plokštumą, statmeną duotajai tiesei. Ji kirs rutulį skritulyje su centru O, o tiesę — taške A (213 pav.). Plokštumos, išvestos per duotąją tiesę ir kertančios rutulį, kerta mūsų išvestą plokštumą tiesėse, einančiose per tašką A ir kertančiose skritulį. Jei AN — viena iš tokių tiesių, tai NM — skritulio, gauto kertant rutulį plokštuma, skersmuo. Jei K — stygos NM vidurys, tai OK⊥AK. Iš to išeina, kad K — apskritimo su skersmeniu OA taškas. Jei AC ir AB — apskritimo su centru O liestinės, tai nesunku įsitikinti, kad lanko BOC taškai sudaro ieškomąją aibę. Taigi, visų pjūvių, gautų kertant rutulį plokštumomis, išvestomis per tiesę, nekertančią rutulio, centrų aibė yra apskritimo, kurio skersmuo lygus atstumui nuo duotosios plokštumos iki rutulio centro, o plokštuma, kurioje yra apskritimas, statmena duotajai tiesei, lankas. Šis lankas yra rutulio viduje.

221. Jei α, β, γ — kampai, kuriuos sudaro bet kokia tiesė su trimis paporiui statmenomis tiesėmis, tai $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$. Iš tikrųjų šie kampai lygūs kampams, kuriuos sudaro stačiakampio gretasienio įstrižainė su trimis jo briaunomis, išeinančiomis iš įstrižainės galo. Tolesnis įrodymas akivaizdus.

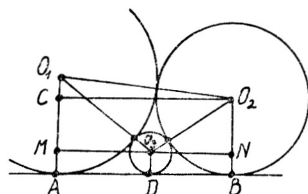
Tegul S — taškas, per kurį galima išvesti tris paporiui statmenas sferos liestines (214 pav.). Jei O — sferos centras, tai $\angle SAO=\angle SBO=\angle SCO=90^\circ$. Pažymėsime $\angle ASO=\alpha$; $\angle BSO=\beta$; $\angle CSO=\gamma$; $AO=BO=CO=R$. Nesunku pastebėti, kad $AS=BS=CS$ ir $\alpha=\beta=\gamma$. Iš to išeina, kad $3\cos^2\alpha=1$; $\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}=1-\sin^2\alpha=1-\left(\frac{AO}{SO}\right)^2=1-\frac{R^2}{SO^2}$. Iš čia $SO=\frac{R\sqrt{6}}{2}$. Taigi, taškai S, tenkinantys uždavinio sąlygą, vienodai nutolę nuo duotosios sferos centro. Iš to išplaukia, kad ieškomoji aibė — sfera su spinduliu $\frac{R\sqrt{6}}{2}$ ir centru taške O.

222. Tegul h_1 — tetraedro aukštinė, išvesta į sieną, kurios plotas S_1, h_2 — aukštinė, išvesta į sieną, kurios plotas S_2, ir t. t. R — įbrėžtinio rutulio spindulys. Laikydami įbrėžtinio rutulio centrą O viršūne, padalinsime duotąjį tetraedrą į keturis tetraedrus, turinčius bendrą viršūnę O. Šių tetraedrų pagrindai — duotojo tetraedro sienos. Tada tetraedro tūris $V=\frac{1}{3}S_1R+\frac{1}{3}S_2R+\frac{1}{3}S_3R+\frac{1}{3}S_4R$ (šių tetraedrų aukštinės lygios įbrėžtinio rutulio spinduliui). Taip pat galioja ir šios lygybės: $h_1\cdot S_1=3V$, $h_2\cdot S_2=3V$, $h_3\cdot S_3=3V$, $h_4\cdot S_4=3V$. Todėl $\frac{R}{h_1}+\frac{R}{h_2}+\frac{R}{h_3}+\frac{R}{h_4}=\frac{S_1R}{S_1h_1}+\frac{S_2R}{S_2h_2}+\frac{S_3R}{S_3h_3}+\frac{S_4R}{S_4h_4}=\frac{S_1R+S_2R+S_3R+S_4R}{3V}=\frac{\frac{1}{3}S_1R+\frac{1}{3}S_2R+\frac{1}{3}S_3R+\frac{1}{3}S_4R}{V}=\frac{V}{V}=1$. Iš to išeina, kad $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}+\frac{1}{h_4}=\frac{1}{R}$.

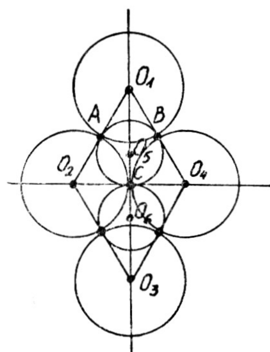
223. Tegul $AO_1=r_1$, $BO_2=r_2$, $DO_3=r_3$ ir r_3 — mažesniojo rutulio spindulys. Tada $O_1O_2=r_1+r_2$, $O_1O_3=r_1+r_3$, $O_2O_3=r_2+r_3$, $CO_1=r_1-r_2$, $MO_1=r_1-r_3$, $NO_2=r_2-r_3$ (215 pav.). Iš trikampio $O_1O_2C: CO_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$. Iš to išeina, kad ir $MN=2\sqrt{r_1r_2}$. Iš trikampio $O_1O_3M: MO_3=\sqrt{(r_1+r_3)^2-(r_1-r_3)^2}=2\sqrt{r_1r_3}$. Iš trikampio $O_2O_3N: O_3N=\sqrt{(r_2+r_3)^2-(r_2-r_3)^2}=2\sqrt{r_1\cdot r_3}$. Kadangi $MO_3+O_3N=MN$, tai $2\sqrt{r_1\cdot r_3}+2\sqrt{r_2\cdot r_3}=2\sqrt{r_1\cdot r_2}$; $\sqrt{r_3}\,(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})=\sqrt{r_1\cdot r_2}$; $r_3\cdot(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2=r_1\cdot r_2$; $r_3=\frac{r_1\cdot r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$. Tai — minimalus mažiausio iš trijų besiliečian-



214 pav.



215 pav.



216 pav.

čių rutulių, turinčių bendrą lietimosi plokštumą, spindulys. Vadinasi, $r_3 \geqslant \frac{r_1 \cdot r_2}{(\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2})^2}$ — nelygybė, kuriai galiojant, tenkinama uždavinio sąlyga.

Pastabos. 1) Mažiausia spindulio r_3 reikšmė atitinka tokią rutulių padėtį, kai liečiamoji plokštuma liečia juos taškuose A, B, D, esančiuose vienoje tiesėje.

2) Jei rutulių spinduliai r_1, r_2, r_3 lygūs tarpusavyje, tai egzistuoja dvi juos liečiančios lygiagrečios plokštumos.

224. Suprojektuosime visą konstrukciją į plokštumą, ant kurios yra rutuliai su spinduliu R ir centrais O_1, O_2, O_3, O_4 (216 pav.). Spindulio r rutuliai tenkins uždavinio sąlygą, jei rutulys su centru O_5 projektuosis į skritulį su spinduliu $AO_5=BO_5=CO_5$. Kadangi trikampis $O_1O_2O_4$ lygiakraštis, $\angle AO_1B=60°$, tai $AB=BC=AC=R$. Lygiakraštis trikampis ABC įbrėžtas į apskritimą su centru O_5, todėl $r=R\frac{\sqrt{3}}{3}$.

225. Jei $AO_2=R$ (217 pav.), tai trikampis $O_1O_2O_3$ — lygiakraštis, $O_1O_2=2R$, $O_2S=R\sqrt{3}$; $OO_2=\frac{2}{3}O_2S=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Tegul $MC=\lambda R$ — kūgio aukštinė (218 pav.), $LP=y$, $BN=x_0$. Tada $NC=BC-BN=O_2O-BN=\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0$. $\triangle NCM\sim\triangle NTL$, todėl $\frac{MC}{LT}=\frac{NC}{NT}$; $\frac{\lambda R}{2R}=$

$$=\frac{\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0}{\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0-y}.$$

Iš čia $y=\frac{(\lambda-2)\cdot\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0\right)}{\lambda}$. Kadangi DO — trapecijos NCPL vidurio linija, tai $DO=\frac{LP+NC}{2}=\frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0\right)$.

217 pav.

218 pav.

$\triangle DOM \sim \triangle DFO_2$, todėl $\frac{DO}{OM}=\frac{FD}{O_2F}$; $\frac{\frac{\lambda-1}{\lambda}\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0\right)}{(\lambda-1)\cdot R}=\frac{FD}{R}$; $FD=$ $=\frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0\right)$. $O_2D=O_2O-DO=\frac{2R\sqrt{3}}{3}-\frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0\right)$.

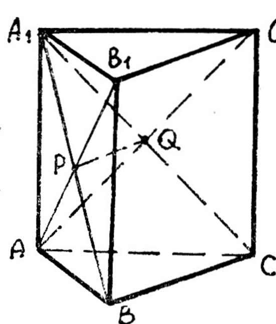
Pažymėsime $NC=\frac{2R\sqrt{3}}{3}-x_0=r$. Iš trikampio $O_2DF: O_2D^2=$ $=O_2F^2+FD^2$; $\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}-\frac{\lambda-1}{\lambda}r\right)^2=R^2+\frac{1}{\lambda^2}r^2$. Iš čia $3(\lambda-2)\cdot r^2-$ $-4R\sqrt{3}(\lambda-1)r+\lambda R^2=0$ (*).

1) Jei $\lambda\neq 2$, tai $D=48R^2(\lambda-1)^2-12(\lambda-2)\lambda R^2=4R^2(9\lambda^2-18\lambda+$ $+12)$; $9\lambda^2-18\lambda+12>O$, kai $\lambda\in R$, nes $D_1=36-48=-12<O$, $r_{1,\,2}=\frac{4R\sqrt{3}(\lambda-1)\pm 2R\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{6(\lambda-2)}=\frac{2\sqrt{3}(\lambda-1)\pm\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{3(\lambda-2)}R$.

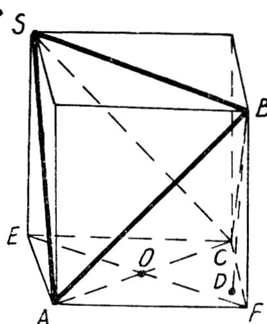
Nagrinėjant nelygybę $OA<r<OO_2$; $\frac{2R\sqrt{3}}{3}-R<r<\frac{2R\sqrt{3}}{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}-$ $-1<\frac{2\sqrt{3}(\lambda-1)\pm\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{3(\lambda-2)}<\frac{2\sqrt{3}}{3}$, įsitikiname, kad ji tenkinama tik, kai $r=\frac{2\sqrt{3}(\lambda-1)-\sqrt{9\lambda^2-18\lambda+12}}{3(\lambda-2)}\cdot R$.

2) Jei $\lambda=2$, tai iš (*) : $-4R\sqrt{3}\,r+2R^2=0$; $r=\frac{R\sqrt{3}}{6}$.

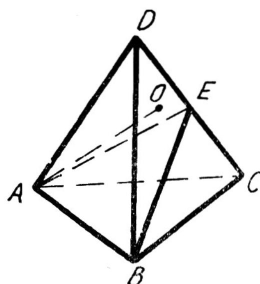
226. Prizmė $ABCA_1B_1C_1$ ir tetraedras A_1ABC turi lygias aukštines ir pagrindus, todėl $V_{A_1ABC}=\frac{1}{3}V$ (1), kur V — duotosios prizmės tūris (219 pav.). Tetraedrai AA_1PQ ir AA_1BC turi lygias aukštines, todėl jų tūriai sutinka taip kaip jų pagrindų plotai. Kadangi $\triangle A_1PQ\sim\triangle A_1BC$ (PQ — vidurio linija), tai $PQ=\frac{1}{2}BC$ ir $V_{AA_1PQ}:V_{AA_1BC}=1:4$ (2). Vadinasi, $V_{APQCB}=3V_{AA_1PQ}$. Iš (1) ir (2) : $V_{AA_1PQ}=\frac{1}{12}V$; $V_{APQCB}=3\cdot\frac{1}{12}V=\frac{1}{4}V$. Atlikę tuos pačius



219 pav.



220 pav.



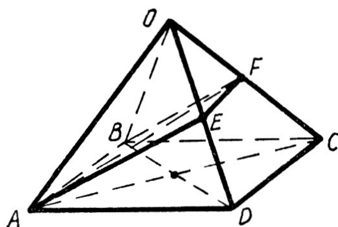
221 pav.

veiksmus tetraedrams A_1APQ ir $A_1AB_1C_1$, gauname: $V_{A_1PQC_1B_1}=$ $=\frac{1}{4}$ V. Tada briaunainio PQC_1CBB_1 tūris lygus $V-\frac{1}{4}V-$ $-\frac{1}{4}V-\frac{1}{12}V=\frac{5}{12}V$. Iš to išeina, kad prizmės dalių tūriai sutinka kaip $\frac{1}{4}:\frac{1}{4}:\frac{1}{12}:\frac{5}{12}$ (arba 3 : 3 : 1 : 5).

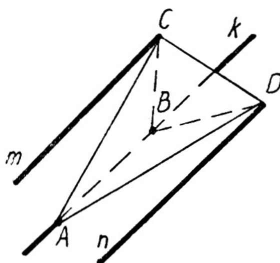
Pastaba. Atkreipkite dėmesį, kad uždavinys išspręstas neatsižvelgiant į tai, kad prizmė taisyklinga.

227. Papildysime tetraedrą iki gretasienio (220 pav.). Per tetraedro briaunas išvesime plokštumas, lygiagrečias priešingoms briaunoms. Tetraedro sienų plokštumos atkerta nuo gretasienio keturis tetraedrus. Akivaizdu, kad kiekvieno iš jų tūris lygus $\frac{1}{6}$ gretasienio tūrio. Iš to išeina, kad duotojo tetraedro tūris lygus $V-4\cdot\frac{1}{6}V=\frac{1}{3}V$, kur V — gretasienio tūris. Kadangi kampas tarp SB ir AC lygus φ, o atstumas tarp jų c, $SB=b$, $AC=a$, tai $BD=$ $=c$ ir BD — gretasienio aukštinė, $\angle AOF=\varphi$. Vadinasi, $S_{AFCE}=$ $=\frac{1}{2}AC\cdot EF\sin\varphi=\frac{1}{2}AC\cdot SB\sin\varphi=\frac{1}{2}ab\sin\varphi$. Iš to išplaukia, kad gretasienio tūris lygus $V=\frac{1}{2}abc\sin\varphi$. O todėl duotojo tetraedro tūris lygus $\frac{1}{3}V=\frac{1}{6}abc\sin\varphi$.

228. Kadangi $DE=EC$, tai BE — trikampio BCD pusiaukraštinė (221 pav.). Ji dalina šį trikampį į dvi lygiaplotes dalis, $S_{BDE}=S_{BCE}$. Du tetraedrai, kurių pagrindai yra šie trikampiai, turi lygias aukštines: AO — atstumas nuo viršūnės A iki plokštumos, kurioje yra šie trikampiai. Iš to išeina, kad šių tetraedrų tūriai lygūs.



222 pav.



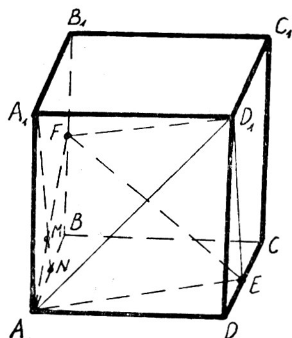
223 pav.

229. Pjūvis AOC dalina duotąją piramidę į du lygio tūrio tetraedrus: OABC ir OADC (222 pav.). Kadangi taškas F yra OC vidurys, tai pagal ankstesnįjį uždavinį piramidės OABF tūris lygus pusei piramidės OABC tūrio, t. y. jis lygus $\frac{1}{4}$ duotosios piramidės OABCD tūrio. Piramidėje OACD pjūvis AEF eina per sienos OCD vidurio liniją. Kadangi $S_{OEF} : S_{OCD} = 1 : 4$, tai tetraedrų OAEF ir OADC tūriai taip pat sutinka kaip 1 : 4. Vadinasi, tetraedro OAEF tūris sudaro $\frac{1}{4}$ tetraedro OADC arba $\frac{1}{8}$ piramidės OABCD tūrio. Todėl piramidės OAEFB tūris sudaro $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$ duotosios piramidės tūrio. Likusią dalį sudaro $1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$. Iš to išeina, kad pjūvis AEFB dalina duotosios piramidės tūrį į dalis, kurios sutinka kaip $\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$ arba 3 : 5.

230. Kadangi $m \parallel n$, tai tiesė m lygiagreti plokštumai, kurioje yra tiesės n ir k, t. y. trikampio ABD plokštumai (223 pav.). Todėl tetraedro CABD aukštinė nepriklauso nuo viršūnės C padėties tiesėje m. Kadangi trikampio ABD viršūnė D yra tiesėje n, $n \parallel k$, tai trikampio ABD plotas nepriklauso nuo taško D padėties tiesėse n. Taigi, tetraedro ABCD tūris nepriklauso nuo taškų C ir D pasirinkimo.

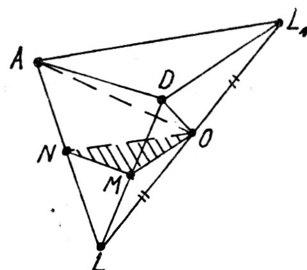
231. Kadangi $BF = DE = \frac{1}{2}$ cm, tai $D_1E = AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ cm (224 pav.). Atstumas tarp prasilenkiančių tiesių AF ir D_1E lygus atstumui tarp lygiagrečių plokštumų — kubo šoninių sienų, kuriose yra tos tiesės, t. y. lygus 1. Išvesime $A_1N \parallel D_1E$. $\angle AA_1N = \angle BAF$ ir $\angle A_1NA = \angle AFB$, ir kadangi $\angle AA_1N + \angle A_1NA = 90°$, tai ir $\angle MAN + \angle MNA = 90°$. Todėl $AF \perp A_1N$. Iš to išeina, kad kampas tarp tiesių AF ir D_1E statusis. Pagal 227 uždavinį $V_{tetr.} =$

$= \frac{1}{6}$ abcsinφ. Todėl tetraedro AD_1EF tūris lygus $\frac{1}{6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot 1 \cdot \sin 90° =$ $= \frac{5}{24}$ (cm^3).



224 pav.

232. Pjūvio viduje pasirinksime tašką O ir sujungsime jį su briaunainio viršūnėmis (225 pav.). Šiuo atveju daugiasienis suskils į piramides, kurių pagrindai — daugiasienio šoninės sienos arba jo pagrindai. Sakykime, OLAD — vienas iš tokių tetraedrų, kurio pagrindas — daugiasienio trikampio šoninė siena (jei šoninė siena trapecija ar lygiagretainis, tai dalijame ją įstrižaine į du trikampius). Atidėsime $OL_1 = OL$ ir sujungsime L_1 su A ir D. Kadangi taškas L yra vienoje iš lygiagrečių plokštumų, taškai A ir D — kitoje, o taškas O — vidurio pjūvyje, tai taškas L_1 yra toje pačioje plokštumoje, kur ir taškai A, D.



225 pav.

Sakykime, NM — daugiakampio, gauto perkirtus daugiasienį plokštuma, lygiagrečia pagrindo plokštumoms ir vienodai nutolusia nuo jų, kraštinė.

Pažymėsime $S_{NMO} = S$. Tada $S_{ADL_1} = 4S$ (panašių figūrų plotai sutinka kaip kraštinių kvadratai). $V_{L_1ADL} = \frac{1}{3} \cdot 4S \cdot H = \frac{4}{3}$ SH; $V_{ODAL_1} = \frac{1}{3} \cdot 4S \cdot \frac{H}{2} = \frac{2}{3} S \cdot H$. Vadinasi, $V_{OLAD} = \frac{4}{3} S \cdot H - \frac{2}{3} S \cdot H =$ $= \frac{2}{3} S \cdot H$. Dabar sumuojant visų piramidžių, kurių pagrindai yra šoninėse sienose, tūrius ir, iškeliant prieš skliaustus bendrą daugiklį $\frac{2}{3}H$, skliaustuose gausime vidurio pjūvio S_3 plotą. Apskaičiuosime viso briaunainio tūrį: $V = \frac{1}{3} S_1 \cdot \frac{H}{2} + \frac{1}{3} S_2 \cdot \frac{H}{2} +$ $+ \frac{2}{3} S_3 \cdot H = \frac{H}{6} (S_1 + S_2 + 4S_3)$.

Pastabos. 1) Gautoji formulė vadinama Simpsono formule.

2) Briaunainis, kuris minimas šio uždavinio sąlygoje, vadinamas prizmatoidu arba trapecoidu.

3) Iš gautos formulės galima išvesti formulę nupjautinės piramidės tūriui skaičiuoti.

233. Kertame cilindrus plokštumomis, lygiagrečiomis abiejų cilindrų ašių plokštumai. Pažymėsime x — atstumą nuo cilindrų ašių susikirtimo taško iki kertančiosios plokštumos (226 pav.). Gautas pjūvis bus kvadratas, kurio kraštinė lygi $AB=2\cdot\sqrt{1-x^2}$. Kvadrato plotas $S(x)=4(1-x^2)$. Pagal pagrindinę tūrių skaičiavimo formulę $V=\int_a^b S(x)\,dx$, įskaitydami, kad kertančiąsias plokštumas galima išvesti ir virš cilindrų ašių ir po jomis, gauname: $V=2\cdot\int_0^1 4(1-x^2)\,dx=8\cdot(x-\frac{1}{3}x^3)|_0^1=\frac{16}{3}$ (cm³).

234. Pasinaudosime kūgio ašiniu pjūviu (227 pav.). $OA=R$, $\angle CSB=\frac{\alpha}{2}$. Tada $SO=\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $SB=R\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $BC=SB\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=$

$=R\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. Kūgio tūris lygus: $V=\frac{1}{3}\pi BC^2\cdot SB=\frac{1}{3}\pi R^2$.

$\cdot\frac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$. Tūris bus mažiausias, kai funkcija $y=\frac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$

turės mažiausią reikšmę. Apskaičiuosime tą reikšmę.

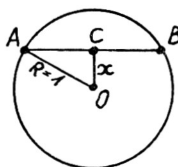
$$y'=\frac{3\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}-\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3\cdot\left(-2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^4\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\cdot\left(3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}-\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)\right)}{2\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

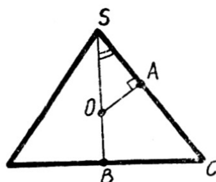
Pagal uždavinį $\frac{\alpha}{2}$— smailusis kampas, todėl $1+\sin\frac{\alpha}{2}\neq0$. Vadinasi, $y'=0$, jei $3\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}-\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=0$.

Pažymėsime $\sin\frac{\alpha}{2}=t$. $3(1-t^2)\cdot t-(1+t)\cdot(-2t^2+1-t^2)=0$; padalinsime iš $1+t$ $(\neq0)$: $t=\frac{1}{3}$. Praeidama šį tašką, išvestinė keičia ženklą iš minuso į pliusą. Iš to išeina, kad tai — minimumo taškas. $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$; $\alpha=2\arcsin\frac{1}{3}$.

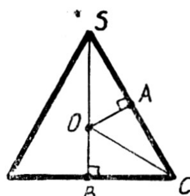
235. Tegul $SB=H$; $BC=r$; $OA=R$; $SC=l$ (228 pav.). Tada $V_k=\frac{1}{3}\pi r^2H$; $V_r=\frac{4}{3}\pi R^3$; $S_{pav.\ k.}=\pi rl+\pi r^2$; $S_{sf.}=4\pi R^2$. Todėl



226 pav.



227 pav.



228 pav.

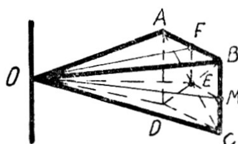
$\frac{V_k}{V_r}=\frac{r^2\cdot H}{4R^3}$; $\frac{S_{pav.\,k.}}{S_{sf.}}=\frac{r\cdot(l+r)}{4R^2}$. Kadangi $S_{SBC}=S_{OSC}+S_{OBC}$, tai $H\cdot r=$ $=1\cdot R+R\cdot r$; $\frac{H\cdot r}{R}=l+r$. Iš to išeina, kad $\frac{V_k}{V_r}=\frac{r^2H}{4R^3}=\frac{r}{4R^2}\cdot\frac{H\cdot r}{R}=\frac{r(l+r)}{4R^2}=$ $\cdot\frac{S_{pav\cdot k\cdot}}{S_{sf\cdot}}$.

236. $AB=BC=a$; $\angle AOB=\angle BOC=\alpha$ (229 pav.). Gautojo sukimosi kūno tūris lygus cilindro su pagrindo spinduliu OM ir aukštine BC ir dviejų kūgių su pagrindo spinduliais OE ir aukštinėmis EF tūrių skirtumui. Iš trikampio OBM : $OM=BM\cdot\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}=$ $=\frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$; $V_c=\pi\cdot OM^2\cdot BC=\pi\cdot\frac{a^2}{4}\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot a=\frac{\pi a^3}{4}\cdot\mathrm{ctg}^2\,\frac{\alpha}{2}$.

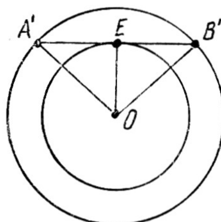
Sukant apie ašį atkarpa AB „nupiešia" žiedą, kurio spinduliai OM ir OE (230 pav.). $OE=\sqrt{OM^2-EM^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\mathrm{ctg}^2\,\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{4}}=$ $=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $2V_k=2\cdot\frac{1}{3}\pi OE^2\cdot EF=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{a^2\cos\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{12}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Sukimosi kūno tūris lygus: $V=V_c-2V_k=\frac{\pi a^3}{4}\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi a^3}{12}\cdot$ $\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi a^3}{12}\cdot\left(3\cdot\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)$.

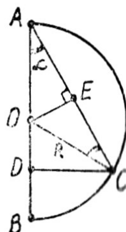
237. Iš trikampio OCE (231 pav.): $CE=R\cdot\cos\alpha$; $AC=2CE=$ $=2R\cos\alpha$; iš trikampio ACD : $DC=AC\cdot\sin\alpha=2R\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; $AD=$ $=AC\cdot\cos\alpha=2R\cos^2\alpha$. $BD=AB-AD=2R-2R\cos^2\alpha=2R\sin^2\alpha$. Pa-



229 pav.



230 pav.



231 pav.

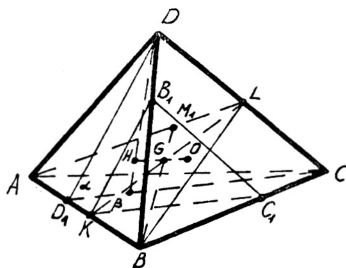
gal rutulio nuopjovos tūrio formulę $V_n=\pi h^2\left(R-\frac{1}{3}h\right)=\pi BD^2\cdot$ $\cdot\left(R-\frac{1}{3}BD\right)=\pi 4R^2\sin^4\alpha\left(R-\frac{2}{3}R\cdot\sin^2\alpha\right)=4\pi R^3\sin^4\alpha\cdot\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\alpha\right)$.

Kūgio, gauto sukant apie AB trikampį ACD, tūris lygus $V_k=$ $=\frac{1}{3}\pi CD^2\cdot AD=\frac{1}{3}\pi 4R^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot 2R\cos^2\alpha=\frac{8}{3}\pi R^3\sin^2\alpha\cos^4\alpha$.

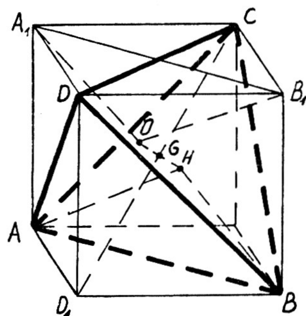
Kūno, gauto sukant apie AB figūrą ACB, tūris lygus $V_l=$ $=V_n+V_k=4\pi R^3\cdot\sin^2\alpha\cdot\left(\sin^2\alpha\cdot\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\alpha\right)+\frac{2}{3}\cos^4\alpha\right)=4\pi R^3\sin^2\alpha\cdot$ $\cdot\left(\sin^2\alpha+\frac{2}{3}\cos 2\alpha\right)$. Pagal sąlygą toks pat tūris ir kūno, gauto sukant apie AB stygos AC atkirstą nuopjovą, t. y. $V_l=\frac{1}{2}V_{rut.}$. Iš čia $2\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\frac{2}{3}\cos 2\alpha\right)=\frac{1}{3}$. Pažymėsime $\cos^2\alpha=t$. Tada $2(1-t)\cdot\left(1-t+\frac{2}{3}(2t-1)\right)=\frac{1}{3}$; $t^2=\frac{1}{2}$. Kadangi $t>0$, tai $t=\sqrt{\frac{1}{2}}$; $\cos^2\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}}$. Kampas α smailusis, todėl $\cos\alpha=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$.

238. Kadangi pagal sąlygą tetraedro aukštinės kertasi viename taške, tai (žr. 216 uždavinį) priešingos tetraedro briaunos statmenos. Todėl plokštumoje α, einančioje per briauną CD ir statmenoje briaunai AB, yra piramidės aukštinė, išvesta iš viršūnės D (232 pav.). Iš to išeina, kad ir taškas H yra toje plokštumoje α. Plokštuma β, einanti per briaunos AB vidurį K ir statmena tai briaunai, lygiagreti plokštumai α. Plokštumoje β yra taškas O, nes jis vienodai nutolęs nuo viršūnių A ir B. Plokštumos α ir β simetriškos plokštumos γ, kuri joms lygiagreti ir vienodai nuo jų nutolusi, atžvilgiu. Kadangi briaunos CD vidurys L yra plokštumoje α, $K\in\beta$, tai atkarpos KL vidurys yra plokštumų α ir β simetrijos centras. Įrodysime, kad tas vidurys yra taškas G, apie kurį kalbama uždavinio sąlygoje. AL — trikampio ADC pusiaukraštinė. Tiesės BG ir AL susikerta taške M_1. Įrodysime, kad M_1 — trikampio ADC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Kadangi $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{GL}$, tai $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BL})=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BL}$. Vektoriai $\overrightarrow{BG}$ ir $\overrightarrow{BM_1}$ kolinearūs, todėl $\overrightarrow{BM_1}=k\,\overrightarrow{BG}=\frac{k}{4}\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{k}{2}\cdot\overrightarrow{BL}$. Vektoriai $\overrightarrow{AM_1}$ ir $\overrightarrow{AL}$ taip pat kolinearūs, todėl $\overrightarrow{AM_1}=\mu\cdot\overrightarrow{AL}$. Iš čia $-\overrightarrow{BA}+$ $+\overrightarrow{BM_1}=\mu\cdot(-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BL})$; $\left(-1+\frac{k}{4}\right)\cdot\overrightarrow{BA}+\frac{k}{2}\overrightarrow{BL}=-\mu\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BL}$.

Kadangi $-1+\frac{k}{4}=-\mu$ ir $\frac{k}{2}=\mu$, tai $\mu=\frac{2}{3}$. Todėl taškas M_1 da-



232 pav.



233 pav.

lina pusiaukraštinę AL santykiu 2 : 1, skaičiuojant nuo viršūnės A. Vadinasi, M_1 — sienos ADC pusiaukraštinių susikirtimo taškas. Taip pat nagrinėjant plokštumas α ir β visoms briaunoms, gauname, kad G — atkarpų, jungiančių tetraedro viršūnes su priešingų sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškais, susikirtimo taškas ir taškai H ir O simetriški taško G atžvilgiu, t. y. jie yra vienoje tiesėje su G ir HG=GO (KHLO — lygiagretainis).

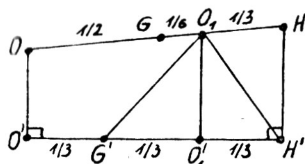
Pastabos. 1) Rekomenduojame išnagrinėti ir kitus šio uždavinio sprendimo būdus.

Papildysime tetraedrą iki gretasienio, kaip parodyta 233 paveikslėlyje. Kadangi ABCD — ortocentriškas tetraedras (žr. 216 uždavinį), tai visos gretasienio briaunos tarpusavyje lygios. Trikampiai A_1B_1O ir ABH simetriški taško G atžvilgiu, nes AA_1B_1B — lygiagretainis ir A_1O statmena plokštumai ACD (taškai A_1 ir O vienodai nutolę nuo taškų A, C, D) ir todėl lygiagreti tetraedro aukštinei, išvestai iš viršūnės B į plokštumą ACD, $A_1O \parallel BH$. Dėl tos pačios priežasties ir $OB_1 \parallel AH$.

2) Atkarpos, jungiančios tetraedro viršūnes su priešingų viršūnėms sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškais, kertasi viename taške — tetraedro svorio centre — ir dalijasi jame santykiu 3 : 1, skaičiuojant nuo viršūnės. Tame pačiame taške kertasi atkarpos, jungiančios priešingų briaunų vidurius, ir dalijasi jame pusiau.

Šį teiginį galima įrodyti pagal schemą: patalpinti tetraedro viršūnėse lygius svorius, iš pradžių rasti trijų svorių svorio centrą, o po to — visos sistemos svorio centrą.

3) Ortocentriškam tetraedrui teisinga lygybė: $OM^2 = 4R^2 - 3d^2$, kur O — apibrėžtos sferos centras, M — aukštinių susikirtimo taškas, R — apibrėžtos sferos spindulys, d — atstumas tarp tetraedro priešingų briaunų vidurio taškų.



234 pav.

239. [1] (140 psl.) apibrėžta centrinė panašumo transformacija arba homotetija su centru O ir koeficientu k. Koeficientas k gali būti ir neigiamas skaičius. Šiuo atveju M_1 bus toks taškas, kad $OM_1 = |k|OM$ ir spinduliai OM_1 ir OM priešingų krypčių (centrinė simetrija — homotetija su $k = -1$).

Tegul H — duotojo tetraedro aukštinių susikirtimo taškas, O — apibrėžtos sferos centras, G — atkarpų, jungiančių tetraedro viršūnes su priešingų sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškais, susikirtimo taškas (234 pav.). Iš ankstesniojo uždavinio HG=GO. Tetraedro sienų pusiaukraštinių susikirtimo taškai yra tetraedro, homotetiško duotajam (homotetijos centras G ir koeficientas $k = -\frac{1}{3}$), viršūnės. Taškas O atvaizduojamas į tašką O_1, esantį tiesėje GH, $GO_1 = \frac{1}{3}GO$. Vadinasi, $HO_1 = \frac{1}{3}HO$ ir taškas O atvaizduojamas į tašką O_1, esant homotetijai su centru H ir koeficientu $k = \frac{1}{3}$. Šia homotetija tetraedro viršūnės atvaizduojamos į sąlygoje nurodytus taškus, esančius tetraedro aukštinėse.

Taigi, tetraedro aukštinių pagrindai ir taškai, kurie dalina kiekvieną atkarpą, jungiančią tetraedro viršūnes su jo aukštinių susikirtimo taškais, santykiu 2 : 1, skaitant nuo viršūnės, yra sferoje su spinduliu $\frac{1}{3}R$ ir centru O. Čia O — apibrėžtos apie tetraedrą sferos centras. Kadangi duotasis tetraedras ortocentriškas (žr. 216 uždavinį), tai tetraedro sienų aukštinių susikirtimo taškai yra to tetraedro aukštinių pagrindai.

Dabar įrodysime, kad tie keturi taškai yra toje pačioje sferoje. Pažymėkime O^1 — apie vieną iš sienų apibrėžto apskritimo centrą, H^1 — tos sienos aukštinių susikirtimo tašką, G^1 — pusiaukraštinių susikirtimo tašką. Taškai H^1 ir O^1 yra taškų H ir O projekcijos į tos sienos plokštumą. Taškas G^1 dalina atkarpą O^1H^1 santykiu 1 : 2. O_1' — taško O_1 projekcija į tos sienos plokštumą, $G^1O_1' = O_1'H^1$. Iš to išeina, kad taškas O_1 vienodai nutolęs nuo taškų H^1 ir G^1. Teiginys įrodytas.

Pastaba. Pateiksime šio uždavinio sprendimą nenaudojant homotetijos, pasiūlytą L. Atanasiano.

Tegul $A_1A_2A_3A_4$ — duotasis tetraedras, H — aukštinių A_1H_1, A_2H_2, A_3H_3, A_4H_4 susikirtimo taškas, O — apibrėžtos sferos centras, G — atkarpų A_1G_1, A_2G_2, A_3G_3, A_4G_4 susikirtimo taškas, kur G_1, G_2, G_3, G_4 — atitinkamų sienų pusiaukraštinių susikirtimo taš-

kai, o taškai D_1, D_2, D_3, D_4 tokie, kad taškas D_i dalina atkarpą A_iH santykiu 2 : 1.

Išnagrinėsime sferą Ω su spinduliu $\frac{1}{3}R$, kur R — apie tetraedrą apibrėžtos sferos su centru taške M spindulys, apibrėžiamas lygybe $\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}$. Taškas M yra tiesėje GO, t. y. Eulerio tiesėje (žr. 238 uždavinį). Įrodysime, kad visi taškai G_i, H_i, D_i, kur $i=1, 2, 3, 4$ yra sferoje Ω.

Pagal 238 uždavinį taškas G — atkarpos HO vidurys, todėl $\overrightarrow{HM}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}-\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HO}-\frac{1}{6}\overrightarrow{HO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HO}$. Taigi, $\overrightarrow{GM}=$ $=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GO}$, $\overrightarrow{HM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HO}$ (1).

1) Įrodysime, kad taškai G_1, G_2, G_3, G_4 yra sferoje Ω. Turime: $\overrightarrow{GG_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GG_2}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GA_2}$, $\overrightarrow{GG_3}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GA_3}$, $\overrightarrow{GG_4}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{GA_4}$. Iš čia įskaitant (1), gauname: $\overrightarrow{MG_1}=\overrightarrow{GG_1}-\overrightarrow{GM}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{GA_1}-\overrightarrow{GO})=$ $=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}$, t. y. $MG_1=\frac{1}{3}OA_1=\frac{1}{3}R$. Analogiškai gauname: $MG_2=$ $=MG_3=MG_4=\frac{1}{3}R$. Taigi, taškai G_1, G_2, G_3, G_4 yra sferoje Ω.

2) Įrodysime, kad taškai H_1, H_2, H_3, H_4 yra toje pačioje sferoje Ω. Jei M^1 — taško M projekcija į sieną $A_2A_3A_4$, tai $\triangle MM^1M_1=\triangle MM^1G_1$ pagal du statinius, todėl $MH_1=MG_1$, t. y. taškas H_1 yra toje sferoje. Analogiškai įrodome, kad ir taškai H_2, H_3, H_4 yra sferoje Ω.

3) Įrodysime, kad taškai D_1, D_2, D_3, D_4 yra sferoje Ω. Pagal uždavinio sąlygą $\overrightarrow{HD_1}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HA_1}$. Įskaitant (1), gauname: $\overrightarrow{MD_1}=$ $=\overrightarrow{HD_1}-\overrightarrow{HM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HA_1}-\frac{1}{3}\overrightarrow{HO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA_1}$, t. y. $MD_1=\frac{1}{3}R$. Iš to išeina, kad taškas D_1 yra sferoje Ω. Analogiškai įrodome, kad ir taškai D_2, D_3, D_4 yra toje pačioje sferoje.

LITERATŪRA

1. *Atanasianas L.* ir kt. Geometrija VII—IX kl.— K., Šviesa, 1991.
2. *Atanasianas L.* ir kt. Geometrija X—XII kl.— K., Šviesa, 1993.
3. *Шарыгин Н.* Задачи по геометрии, планиметрия.—М., «Наука», 1982.
4. *Шарыгин Н.* Задачи по геометрии, стереометрия.— М., «Наука», 1984.
5. *Прасолов В., Шарыгин Н.* Задачи по стереометрии.— М., «Наука», 1989.
6. *Прасолов В.* Задачи по планиметрии, части 1 и 2.— М., «Просвещение», 1991.
7. *Коксетер Г., Грейтцер С.* Новые встречи с геометрией.— М., «Наука», 1978.
8. *Шклярский Д.* и др. Избранные задачи и теоремы элементарной математики, части 2 и 3.— М., Издательство технико-теоретической литературы, 1952, 1954.

TURINYS

Valentinas M a t i u c h i n a s

GEOMETRIJOS SUNKESNI UŽDAVINIAI

SL 1086. 1995 05 20. Tir. 5000 egz. Užs. 155.
Išleido Lietuvos Respublikos švietimo ir mokslo ministerijos Leidybos centras, Geležinio Vilko g. 12, 2600 Vilnius.
Spausdino Poligrafinių paslaugų įmonė, Strazdelio 1.